FACULTAD DE INGENIERÍA
U N A M

PROBABILIDAD

Y

ESTADÍSTICA

Irene Patricia Valdez y Alfaro

Marco Antonio Gómez Ramírez

irenev@unam.mx marcog@unam.mx

T E M A S DEL CURSO

1. Análisis Estadístico de datos muestrales.
2. Fundamentos de la Teoría de la probabilidad.
3. Variables aleatorias.
4. Modelos probabilísticos comunes.
5. Variables aleatorias conjuntas.
6. Distribuciones muestrales.

CONTENIDO TEMA 5

5. Variables aleatorias Conjuntas.

Objetivo: El alumno conocerá el concepto de variable aleatoria conjunta y podrá analizar el comportamiento probabilista, conjunta e individualmente, de las variables a través de su distribución, e identificará relaciones de dependencia entre dichas variables.

5.1 Variables aleatorias conjuntas discretas: Función de probabilidad conjunta, su definición y propiedades. Funciones marginales de probabilidad. Funciones condicionales de probabilidad.

5.2 Variables aleatorias conjuntas continuas: Función de densidad conjunta, su definición y propiedades. Funciones marginales de densidad. Funciones condicionales de densidad.

5.3 Valor esperado de una función de dos o más variables aleatorias. Valor esperado condicional.

5.4 Variables aleatorias independientes. Covariancia, Correlación, y sus propiedades. Variancia de una suma de dos o más variables aleatorias.

5.5 Distribución normal bivariada.

VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS

Función de probabilidad conjunta, su definición y propiedades.

VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS

En muchas ocasiones se requiere analizar el comportamiento probabilístico de dos o más variables aleatorias simultáneamente, esto es la probabilidad de su intersección.

Consideremos la probabilidad de la intersección de los eventos **A** y **B**, si asociamos **X** al evento **A** y **Y** al evento **B** respectivamente y X e Y son discretas, la función de probabilidad conjunta se denota como

$$\mathrm{P}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

donde x e y son todos los posibles resultados del evento **A** y del evento **B** respectivamente. Lo anterior puede extenderse a un número mayor de variables aleatorias la función de probabilidad conjunta en tal caso se puede denotar como:

$P(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ donde n es el número de variables aleatorias involucradas

VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS

Para que una función distribución de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias X y Y sea considerada como tal, debe cumplir lo siguiente:

Si X e Y son discretas

$$0 \leq P(x_i, y_j) \leq 1$$

$$\sum_{\forall i} \sum_{\forall j} P(x_i, y_j) = 1$$

$$P(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

Si X e Y son continuas

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dxdy = 1$$

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_{c}^{d} \int_{a}^{b} f(x, y) dxdy$$

VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS

Distribución de probabilidad acumulativa conjunta:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Si X e Y son discretas

$$F(x,y) = \sum_{\forall u \leq y} \sum_{\forall t \leq x} P(t,u)$$

Si X e Y son continuas

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(t,u)dtdu$$

VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS

Distribuciones de probabilidad marginales:

Si X e Y son discretas

$$P(x) = \sum_{\forall y} P(x, y)$$

$$P(y) = \sum_{\forall x} P(x, y)$$

Si X e Y son continuas

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$$

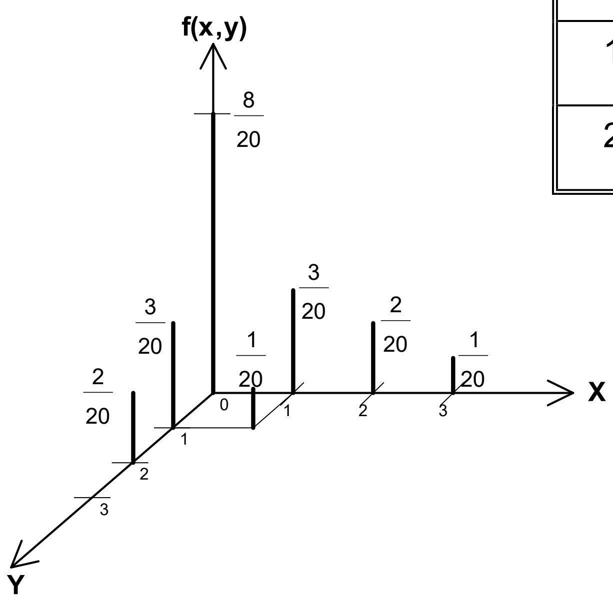
$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

Ejemplo 1:

Un fabricante de bombas para agua, somete sus productos terminados a una revisión final. Se le han presentado dos tipos de defecto: eléctrico (en 3 diferentes componentes) y mecánico (en 2 diferentes componentes), el número de cada tipo de defecto corresponderá a una variable; X a la ocurrencia de defectos eléctricos e Y a la ocurrencia de defectos mecánicos.

El resultado de la revisión de 20 bombas se muestra en la tabla siguiente:

y \ x	0	1	2	3
0	$\frac{8}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$
1	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$		
2	$\frac{2}{20}$			



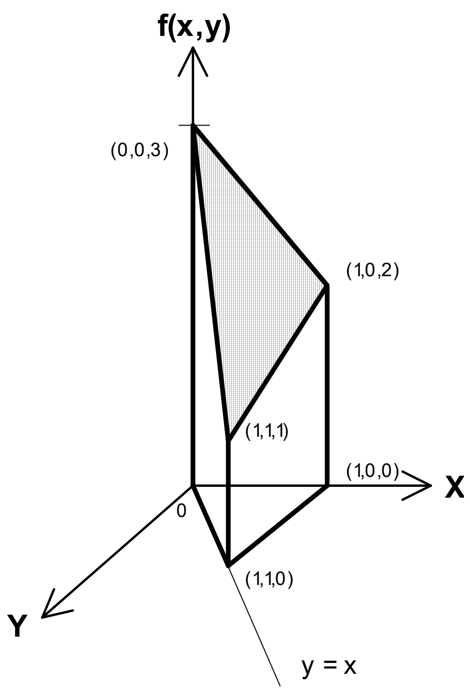
a) Verificar que se trata de una distribución de probabilidad.
b) Encontrar la distribución marginal de X y la de Y.
c) Encontrar las distribuciones condicionales de X dado Y y de Y dado X.

Ejemplo 2:

Una compañía distribuidora de música grabada, tiene para venta discos compactos y cintas. Considerando que X representa la venta de discos compactos y Y representa la venta de cintas y suponiendo que f(x, y) representa la función distribución de probabilidad de venta conjunta.:

$$f(x,y) = \begin{cases} 3-x-y, & 0\le x\le 1, \quad 0\le y\le x \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La unidad representa la venta de 1000 discos durante un mes.



a) Verificar que se trata de una distribución de probabilidad.
b) Encontrar la distribución marginal de X y la de Y.
c) Encontrar las distribuciones condicionales de X dado Y y de Y dado X.

VALOR ESPERADO DE UNA FUNCIÓN DOS VA CONJUNTAS

Si h(x, y) es una función de las VA conjuntas X e Y, entonces:

Si X e Y son discretas

$$E\{h(x,y)\} = \sum_{\forall y} \sum_{\forall X} h(x,y)P(x,y)$$

Si X e Y son continuas

$$E\{h(x,y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)f(x,y)dxdy$$

Valor esperado de la suma de dos funciones de las VA conjuntas X e Y

E {h(x, y) ± g (x, y)} = E {h (x, y) } ± E {g (x, y)}

CURVA DE REGRESIÓN

Si X e Y son dos VA conjuntas, entonces, la curva de regresión de X nos muestra el grado de asociación existente entre las dos variables, sin presuponer alguna relación causa efecto:

La curva de regresión se define como la esperanza matemática de Y dado X, esto es:

$$E\{Y|X\} = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x) dy$$

Donde $f(y|x)$ es la función de densidad condicional de Y dado X

Ejemplo 3:

Para el ejemplo de la distribuidora de música, encontrar y dibujar la curva de regresión:

COVARIANZA

La covarianza de dos VA conjuntas X e Y se define como:

$$\sigma^2{}_{xy} = E\{xy\} - E\{x\}E\{y\}$$

Caso particular: si $E\{xy\} = E\{x\}E\{y\}$

entonces:

$$\sigma^2{}_{xy} = 0$$

Y en este caso se dice que las VA X e Y son estadísticamente independientes.

VARIANZA DE LA SUMA DE DOS VARIABLES ALEATORIAS

Sean X y Y dos variables aleatorias y *f(x, y)* su distribución de probabilidad conjunta, también considérense **a** y **b** dos constantes. Deseamos obtener la variancia de la función aX + bY

Aplicamos la definición de varianza:

$$Var[aX + bY]=E[(aX + bY)^2]= ?$$

Ejercicio de clase: Desarrollar… y encontrar la expresión correcta:

$$Var[aX + bY]=a^2V[X]+b^2V[Y]+2Cov[X,Y]$$

Caso particular: si X y Y son independientes, entonces: Cov[X,Y]=0
y $Var[aX + bY]=a^2V[X]+b^2V[Y]$

DISTRIBUCIÓN NORMAL BIVARIADA

Consultar el siguiente artículo:

Gallego, F. 2010. Análisis Multivariado, La distribución normal bivariada, Universidad Nacional sede Manizales. Recuperado el 6 de noviembre de 2012. Disponible en:

http://es.scribd.com/doc/31296483/Distribucion-Normal-Bivariada

Tarea: encontrar un ejercicio resuelto de aplicación de la distribución normal bivariada.