FACULTAD DE INGENIERÍA
U N A M

PROBABILIDAD

Y

ESTADÍSTICA

Irene Patricia Valdez y Alfaro

irenev@unam.mx

Versión revisada: junio 2018

T E M A S DEL CURSO

1. Análisis Estadístico de datos muestrales.
2. Fundamentos de la Teoría de la probabilidad.
3. Variables aleatorias.
4. Modelos probabilísticos comunes.
5. Variables aleatorias conjuntas.
6. Distribuciones muestrales.

CONTENIDO TEMA 3

3. Variables aleatorias.

<u>Objetivo:</u> El alumno conocerá el concepto de variable aleatoria y podrá analizar el comportamiento probabilista de la variable, a través de su distribución y sus características numéricas.

3.1 Concepto de variable aleatoria como abstracción de un evento aleatorio.

3.2 Variable aleatoria discreta: función de probabilidad sus propiedades y su representación gráfica. Función de distribución acumulativa, sus propiedades y su representación gráfica.

3.3 Variable aleatoria continua: función de densidad de probabilidad sus propiedades y su representación gráfica. Función de distribución acumulativa, sus propiedades y su representación gráfica.

3.4 Valor esperado o media de la variable aleatoria discreta y de la continua. Valor esperado como operador matemático y sus propiedades. Momentos con respecto al origen y a la media.

3.4 Parámetros de las distribuciones de las variables aleatorias. Medidas de tendencia central, de dispersión y de asimetría.

INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

VARIABLES ALEATORIAS

Preparado por Irene Patricia Valdez y Alfaro

VARIABLE *

VARIABLE: *Adj*. que varia o puede variar.
f. Mat. Magnitud que puede tener un valor cualquiera de los comprendidos en un conjunto. Número que resulta de una medida u operación.

VARIABLE CONTINUA: La que consta de unidades o partes que no están separadas unas de otras, como la longitud de una línea, el área de una superficie, el volumen de un sólido, la cabida de un vaso, etc.

VARIABLE DISCRETA: La que consta de unidades o partes separadas unas de otras, como los árboles de un monte, los soldados de un ejército, los granos de una espiga, etc.

* Fuente: Real Academia de la Lengua Española

VARIABLE DETERMINÍSTICA

Variable: *f. Mat*. Magnitud que puede tener un valor de los comprendidos en un conjunto, pero predecible con exactitud.

Variable Determinística:

- Continua
- Discreta

VARIABLE ALEATORIA

Variable Aleatoria: *f. Mat*. Magnitud cuyos valores están determinados por las leyes de probabilidad, como los puntos resultantes de la tirada de un dado.

Variable Aleatoria: $\begin{cases} \text{Continua} \\ \text{Discreta} \end{cases}$

Algunos valores de una variable aleatoria pueden ser mas probables que otros, lo que da origen al concepto de distribución de probabilidad de una VA.

VARIABLE ALEATORIA

Una VA es una función sobre el espacio de los posibles resultados (eventos) de un experimento aleatorio,

Por ejemplo:

a) Al arrojar una moneda y observar el lado que queda hacia arriba:

X={ $x_1 = 1$ (águila), $x_2 = 0$ (sol) }

b) Alimentar de la misma manera a 20 animales y obervar su peso después de 30 días

c) arrojar dos dados y anotar la suma de los puntos que caen hacia arriba.

d) el voltaje de salida de 50 eliminadores de baterías.

Algunos valores de una variable aleatoria pueden ser mas probables que otros, lo que da origen al concepto de distribución de probabilidad de una VA.

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Ejemplo: Caso de una VA discreta:

Experimento: Arrojar dos dados y observar la VA X : la suma de los puntos de las caras que quedan hacia arriba.

Las formas en que puede ocurrir cada uno de los valores que toma la VA X se muestran en la tabla.

Observemos que hay 1 posibilidad en 36 de que X=2, mientras que hay 2 posibilidades en 36 de que X=3

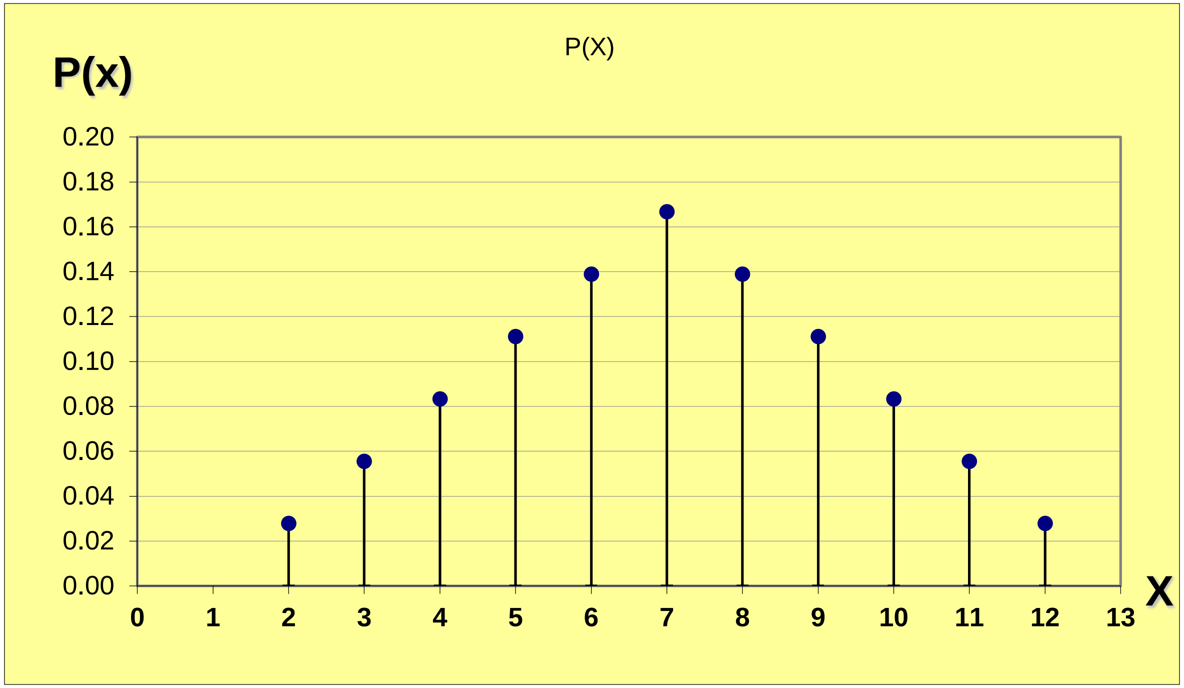
Y_1	Y_2	$X=Y_1+Y_2$	Y_1	Y_2	$X=Y_1+Y_2$
1	1	2	4	1	5
1	2	3	4	2	6
1	3	4	4	3	7
1	4	5	4	4	8
1	5	6	4	5	9
1	6	7	4	6	10
2	1	3	5	1	6
2	2	4	5	2	7
2	3	5	5	3	8
2	4	6	5	4	9
2	5	7	5	5	10
2	6	8	5	6	11
3	1	4	6	1	7
3	2	5	6	2	8
3	3	6	6	3	9
3	4	7	6	4	10
3	5	8	6	5	11
3	6	9	6	6	12

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Las probabilidades para cada valor de la VA X se muestran en la tabla. En este ejemplo la tabla representa la *función de distribución de probabilidad (fdp)* de la VA X.

X	P(X=x)
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

Representación gráfica de la función de distribución de probabilidad de la VA X



DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Distribución de probabilidad de una VA X:

$$f(x) = P(X=x)$$

En nuestro ejemplo de la suma de dos dados: $f(3) = P(X=3)$; $f(3) = 2/36$

Propiedades de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta (también conocida como función masa de probabilidad, fmp) :

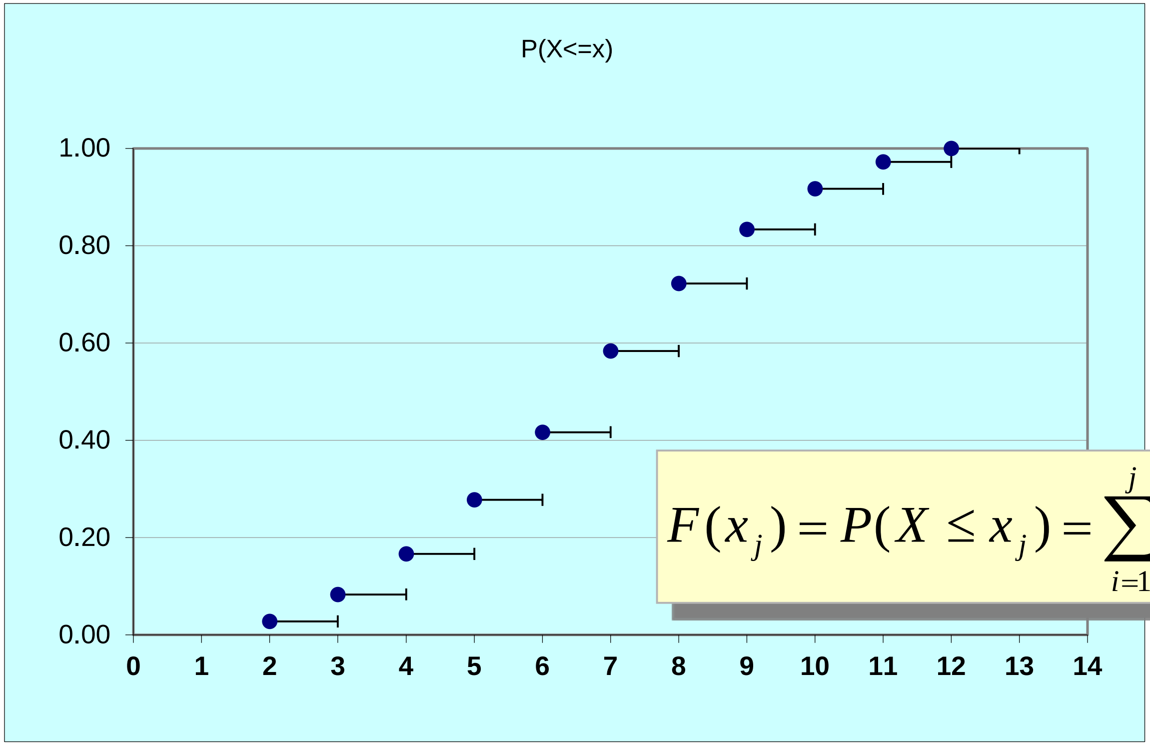
a) $f(x) \geq 0$ Para toda x que pertenece a X

b) $\sum_{\forall x} f(x) = 1$

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULATIVA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Las probabilidades acumuladas para cada valor de la VA X se muestran en la siguiente tabla que representa la *función de distribución acumulativa (FDA)* de la VA X.

X	$P(X \leq x)$
2	1/36
3	3/36
4	6/36
5	10/36
6	15/36
7	21/36
8	26/36
9	30/36
10	33/36
11	35/36
12	36/36



$$F(x_j) = P(X \leq x_j) = \sum_{i=1}^{j} x_i$$

Esta es una función escalón, hay un salto en cada valor de X y es plana entre ellos.

En nuestro ejemplo: $F(3) = P(X <= 3)$; $F(3) = 1/36 + 2/36 = 3/36$

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULATIVA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

$$F(x_j) = P(X \leq x_j) = \sum_{i=1}^{j} x_i$$

La FDA es una función no decreciente de X con las siguientes propiedades.

$$1.\ \ 0 \leq F(x) \leq 1$$

$$2.\ \ F(x_i) \geq F(x_j) \qquad \forall \quad x_i \geq x_j$$

$$3.\ \ \mathrm{P}(\mathrm{X} > \mathrm{x}) = 1 - F(x)$$

Además, si X pertenece al conjunto de los números enteros:

$$4.\ \ \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x}) = F(x) - F(x-1)$$

$$5.\ \ P(x_i \leq X \leq x_j) = F(x_j) - F(x_i - 1) \qquad \forall \quad x_i \geq x_j$$

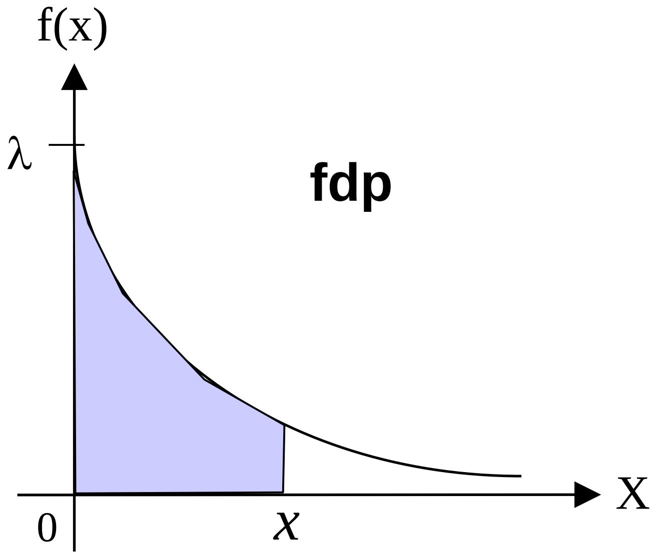
consultar: Canavos, Prob. y Estad., Aplicaciones y Métodos., Mc Graw Hill., pag. 56

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Caso de una VA continua

Experimento: observar la VA X : el tiempo que dura una lámpara hasta que se funde.

La probabilidad de que una lámpara dure de 0 a 1,000 horas es más alta que la probabilidad de que dure de 1,000 a 2,000 horas; es decir, que a medida que transcurre el tiempo, la probabilidad de que continúe en operación disminuye; este comportamiento se puede representar mediante una curva exponencial de la forma:



$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Caso de una VA continua

Propiedades de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua (también conocida como función de densidad de probabilidad, fdp) :

$$1.\quad f(x) \geq 0, \qquad -\infty \leq x \leq \infty$$

$$2.\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

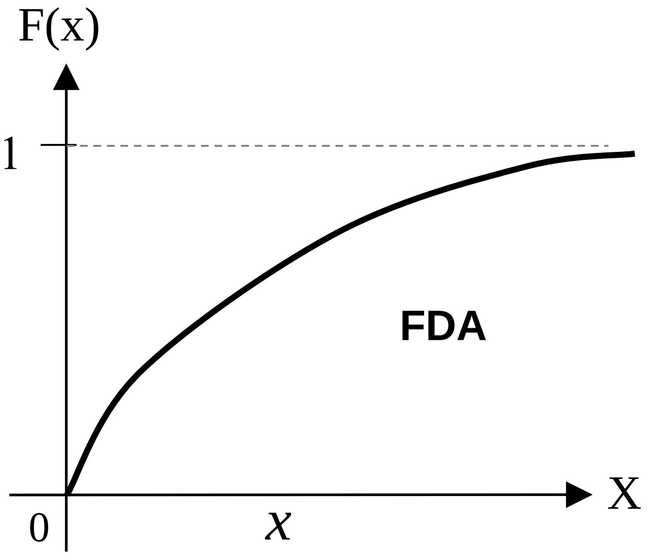
$$3.\quad P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULATIVA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Caso de una VA continua

Experimento: observar la VA X : el tiempo que dura una lámpara hasta que se funde.

La probabilidad de que una lámpara dure al menos X horas se obtiene mediante la función de distribución acumulativa (FDA).



fdp

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

FDA

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULATIVA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Caso de una VA continua

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

La FDA es una función no decreciente de X con las siguientes características.

1. $F(-\infty) = 0$
2. $F(+\infty) = 1$
3. $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
4. $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$

además: $$P(X = x) = \int_{x}^{x} f(t)dt = 0$$

y: $$P(X \leq x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F(x)$$

VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA O "ESPERANZA MATEMÁTICA"

Valor esperado de una variable aleatoria X:

$$E[X] = \begin{cases} \sum\limits_{x} xP(x) & ; \text{ si X es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx & ; \text{ si X es continua} \end{cases}$$

Valor esperado de una función *g(x)* de una variable aleatoria X:

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum\limits_{x} g(x)P(x) & ; \text{ si X es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx & ; \text{ si X es continua} \end{cases}$$

PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO COMO OPERADOR MATEMÁTICO

Si X es una variable aleatoria con distribución de probabilidad *f(x)*; *a*, *b* y *c* son constantes y *g(x)* y *h(x)* son funciones de X, entonces:

1. $$E[c]=c$$

2. $$E[aX+b]=aE[X]+b$$

3. $$E[g(x)+h(x)]=E[g(x)]+E[h(x)]$$

MOMENTOS DE UNA VARIABLE ALEATORIA

El momento de orden k respecto al origen de una variable aleatoria se define como:

$$\mu'_k = E[X^k] = \begin{cases} \sum_{\forall i} x_i^k P(x_i) & ; \quad \text{si X es discreta.} \\ \int_x x^k f(x)dx & ; \quad \text{si X es continua.} \end{cases}$$

El momento de orden k respecto a la media de una variable aleatoria se define como:

$$\mu_k = E[(X-\mu)^K] = \begin{cases} \sum_{\forall i} (x_i - \mu)^k P(x_i) & ; \text{si X es discreta.} \\ \int_x (x-\mu)^k f(x)dx & ; \text{si X es continua.} \end{cases}$$

MEDIA, VARIANZA Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE UNA VA

- Valor esperado o media de una variable aleatoria

$$\mu = E[X] = \begin{cases} \sum_{\forall i} x_i P(x_i) & ; \quad \text{si X es discreta.} \\ \int_x x f(x) dx & ; \quad \text{si X es continua.} \end{cases}$$

- Varianza de una variable aleatoria

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \begin{cases} \sum_{\forall i} (x_i - \mu)^2 P(x_i) & ; \text{si X es discreta.} \\ \int_x (x-\mu)^2 f(x) dx & ; \text{si X es continua.} \end{cases}$$

- Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

MOMENTOS DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Los momentos de orden k <u>respecto a la media</u> pueden expresarse en función de los momentos <u>respecto al origen</u> mediante la relación:

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \mu^j \mu'_{k-j} \; ; \; k = 0,1,2,\ldots$$

Ejemplo:

Para k=2 (segundo momento respecto a la media = varianza)

$$\mu_2 = \sum_{j=0}^{2} (-1)^j \binom{2}{j} \mu^j \mu'_{2-j} = (-1)^0 \binom{2}{0} \mu^0 \mu'_{2-0} + (-1)^1 \binom{2}{1} \mu^1 \mu'_{2-1} + (-1)^2 \binom{2}{2} \mu^2 \mu'_{2-2}$$

$$\mu_2 = (1)(1)(1)\mu'_2 + (-1)(2)\mu\mu'_1 + (1)(1)\mu^2\mu'_0$$

$$\mu_2 = \mu'_2 + (-2)\mu\mu + \mu^2(1)$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu^2$$

Notar que:

$\mu'_1 = \mu$ y $\mu'_0 = 1$

$$\mu_2 = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

MOMENTOS DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Con un procedimiento análogo al anterior encontramos que:

Para k=3

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu\mu'_2 + 2\mu^3$$

Para k=4

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu\mu'_3 + 6\mu^2\mu'_2 - 3\mu^4$$

PROPIEDADES DE LA VARIANZA COMO OPERADOR MATEMÁTICO

Si X es una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f_X(x)$; a, b y c son constantes , entonces:

1. $$V[c] = 0$$

2. $$V[aX + b] = a^2 V[X]$$

Además, si Y es una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f_Y(y)$, y se cumple que X y Y son INDEPENDIENTES entonces:

3. $$V[X + Y] = V[X] + V[Y]$$

DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV

Teorema:

Si X es una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f_X(x)$ con media μ varianza σ^2; y k es una constante positiva, entonces:

$$\boxed{P\left(\left|X-\mu\right| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}}$$

Formas alternativas, a veces útiles, de la desigualdad de Chebyshev son:

$$\boxed{P\left(\left|X-\mu\right| < k\sigma\right) \geq 1-\frac{1}{k^2}} \quad \textbf{y} \quad \boxed{P\left(\mu-k\sigma < X < \mu+k\sigma\right) \geq 1-\frac{1}{k^2}}$$

La desigualdad proporciona una probabilidad límite de que la variable aleatoria X esté a lo más a k desviaciones estándar de la media sin que sea necesario conocer la distribución de probabilidad de X, aunque se considera un resultado “débil”, ya que si se conoce con precisión $f(x)$ se pueden obtener mejores resultados.