FACULTAD DE INGENIERÍA
U N A M

PROBABILIDAD

Y

ESTADÍSTICA

Irene Patricia Valdez y Alfaro

irenev@unam.mx

Versión revisada: junio 2018

FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

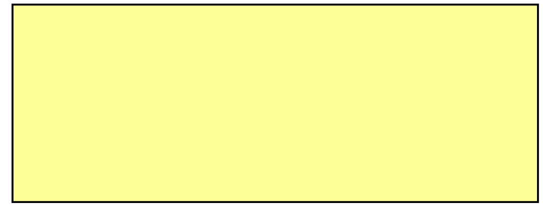
CONCEPTOS PREVIOS:

REPASO DE CONJUNTOS

Preparado por Irene Patricia Valdez y Alfaro

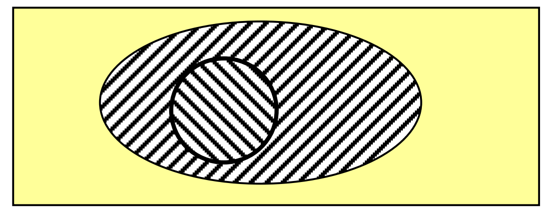
NOTACIONES DE CONJUNTOS Y DIAGRAMAS DE VENN

Conjunto universal: U

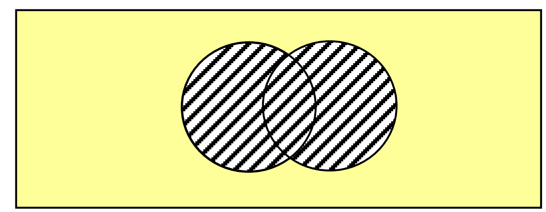


Conjunto vacío: Ø

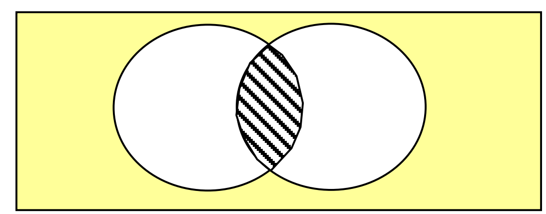
Subconjunto: $A \subset B$



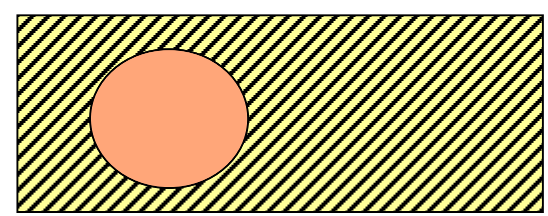
Unión de conjuntos: $A \cup B$



Intersección de conjuntos: $A \cap B$



Complemento del conjunto A respecto de U: $\overline{A}$ o bien: A’



Preparado por Irene Patricia Valdez y Alfaro

ALGUNAS LEYES DE CONJUNTOS

- Para cualquier conjunto A: $\emptyset \subset A$
- Para un conjunto U, $A \subset U$ si todos los elementos de A pertenecen a U
- $A = B$ si y solo si $A \subset B$ y $B \subset A$
- Para cualquier conjunto A: $A \subset A$
- Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces: $A \subset C$

ALGUNAS LEYES DE CONJUNTOS

Leyes de identidad:

$$A \cup \varnothing = A \qquad A \cup U = U$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing \qquad A \cap U = A$$

Leyes de Morgan:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Leyes asociativas:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Leyes distributivas:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Preparado por Irene Patricia Valdez y Alfaro

PRODUCTO CARTESIANO

Dados dos conjuntos A y B, su producto cartesiano se define como:

$$A \times B = \{ (x,y) \mid x \in A , y \in B \}$$

Ejemplo:

$$A = \{ x \mid x \leq 3, x \in N \}$$

$$B = \{ y \mid y \text{ es una vocal} \}$$

$$\begin{aligned} A \times B = \{ & (1,a), (1,e), (1,i), (1,o), (1,u) , \\ & (2,a), (2,e), (2,i), (2,o), (2,u), \\ & (3,a), (3,e), (3,i), (3,o), (3,u) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \times A = \{ & (a,1), (a,2), (a,3), \\ & (e,1), (e,2), (e,3), \\ & (i,1), (i,2), (i,3), \\ & (o,1), (o,2), (o,3), \\ & (u,1), (u,2), (u,3), \} \end{aligned}$$

FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

CONCEPTOS PREVIOS:

TÉCNICAS DE CONTEO

Preparado por Irene Patricia Valdez y Alfaro

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO

Para un experimento que consta de k eventos sucesivos donde:

el primer evento puede resultar de m_1 maneras distintas,
el segundo evento puede resultar de m_2 maneras distintas
.
.
.
El k-ésimo evento puede resultar de m_k maneras distintas.

El número total de resultados para el experimento completo está dado por:

$$m_1 \bullet m_2 \bullet \ldots \bullet m_k$$

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO

Ejemplo 1:

En un sorteo cada participante debe elegir en orden cuatro imágenes de entre 25. Durante el sorteo se descubren una por una cuatro imágenes imágenes (sin repetición) y ganan quienes acierten a las cuatro en el mismo orden en que salieron. ¿cuántos posibles resultados puede tener el sorteo?

No. de resultados = (25) (24) (23) (22) = 303,600

Ejemplo 2:

En un sorteo cada participante debe elegir cuatro números del 1 al 25. Durante el sorteo se seleccionan cuatro números <u>con repetición</u> y ganan quienes acierten a los cuatro números en el mismo orden en que salgan. ¿cuántos posibles resultados puede tener el sorteo?

No. de resultados = (25) (25) (25) (25) = 25^4 = 390,625

Nótese que en este caso, si **n** es el número total de elementos diferentes disponibles y **r** es el número de objetos que se seleccionarán con repetición, entonces el número total de resultados posibles es: n^r.

Preparado por Irene Patricia Valdez y Alfaro

PERMUTACIONES

Permutaciones simples:

Si se tiene un conjunto de n objetos diferentes, las permutaciones son subconjuntos de r objetos, en donde una permutación es distinta de otra <u>si difiere en al menos un elemento o en el orden de estos</u>. Condición: $r < n$.

Para escoger el 1er. elemento hay n formas distintas.
Para escoger el 2do. elemento hay (n-1) formas distintas.
Para escoger el 3er. elemento hay (n-2) formas distintas.
. . .
Para escoger el r-ésimo. elemento hay [n - (r-1)] formas distintas, o bien, (n-r+1).

Por el principio fundamental del conteo, el número total de permutaciones es:

$$P(n,r) = n\,(n-1)\,(n-2)\,...\,(n-r+1)$$

Que también se puede expresar de la forma:

$$P(n,r) = P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

PERMUTACIONES

Si en las permutaciones n = r entonces: P(n,n) = n!

¿de cuántas maneras se puede acomodar una reunión de cinco personas en una fila de cinco sillas?

5	4	3	2	1

$\Rightarrow$ 5!=120

Permutaciones circulares:

n objetos pueden distribuirse en un círculo de (n-1)(n-2)...(3)(2)(1) formas distintas

$$\boxed{PC_n = (n-1)!}$$

¿de cuántas maneras se puede acomodar una reunión de cinco personas en una mesa redonda?

Nótese que la primera persona puede colocarse en cualquier lugar, por lo que de las P(n,r) hay que desechar las que son iguales, por lo que PC_n = n! / n = (n-1)!

PERMUTACIONES

Permutaciones con repetición:

Si se tiene un conjunto de n objetos diferentes, se forman conjuntos de r objetos, en donde se permite la repetición y además se permite: $r < n$, $r > n$ ó $r = n$

Para escoger el 1er. elemento hay n formas distintas.
Para escoger el 2do. elemento nuevamente hay n formas distintas.
Para escoger el 3er. elemento también hay n formas distintas.
. . .
Para escoger el r-ésimo. elemento hay n formas distintas,

Por el principio fundamental del conteo, el número total de permutaciones es:

$$PR(n,r) = n \bullet n \ldots\ldots \bullet n = n^r$$

lo que también se expresa de la forma:

$$\boxed{PR_r^n = n^r}$$

Nótese que en este caso, después de observar cada resultado se devuelve el elemento al conjunto, y para el siguiente ensayo hay otra vez n resultados posibles; por lo que se dice que **se toman muestras con reemplazo**.

PERMUTACIONES

Permutaciones con grupos de objetos iguales:

Si en un conjunto de tamaño n, existen
m_1 objetos iguales
m_2 objetos iguales
....
m_k objetos iguales,
donde $m_1+m_2+..+m_k=n$

El número de permutaciones de n objetos es:

$$P^{n}_{m_1, m_2, .., m_k} = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \, \ldots \, m_k!}$$

Ejemplo:

¿cuántos códigos diferentes de siete letras pueden formarse con tres letras X, dos letras Y y dos letras Z?

$$P^{7}_{3,2,2} = \frac{7!}{3!\, 2!\, 2!} = 210$$

COMBINACIONES

Si se tiene un conjunto de n objetos diferentes, las combinaciones son subconjuntos de r objetos, en donde una combinación es distinta de otra si difiere en al menos un elemento, sin importar el orden de éstos.

Condición: r < n.

El número total de permutaciones es: $$P(n,r) = P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Pero como para cada combinación hay r! permutaciones, se tiene que: $$P_r^n = r!\,C_r^n$$

Despejando: $$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{1}{r!}\frac{n!}{(n-r)!}$$

Que también se puede expresar de la forma:

$$\boxed{\binom{n}{r} = C(n,r) = C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

COMBINACIONES

Ejemplo 1:

En un sorteo cada participante debe elegir cuatro números distintos del 1 al 25. Durante el sorteo se sacan cuatro números sin repetición y ganan quienes acierten a los cuatro números sin importar el orden en que salgan. ¿cuántos posibles resultados puede tener el sorteo?

Puesto que no importa el orden en que salen los números, se trata de combinaciones:

$$\binom{25}{4} = C_4^{25} = \frac{25!}{4!(25-4)!} = \frac{25!}{4!(21)!} = 12{,}650$$

COMBINACIONES

Ejemplo 2:

De cuántas maneras puede escogerse un comité compuesto por 3 hombres y tres mujeres, de un grupo de 7 hombres y 5 mujeres

1. Los 3 hombres se pueden elegir de 35 formas distintas.

$$\binom{7}{3} = C_3^7 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

2. Las 3 mujeres se pueden elegir de 10 formas distintas.

$$\binom{5}{3} = C_3^5 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

3. Por el principio fundamental del conteo, el número de comités distintos es de:

$$C_3^7 \, C_3^5 = 350$$

COMBINACIONES

Combinaciones con repetición:

Si se tiene un conjunto de n objetos diferentes, se forman conjuntos de r objetos, en donde se permite la repetición, sin importar el orden de los elementos; aquí también, una combinación es distinta de otra si difieren en al menos un elemento, y además se permite: $r < n$ y $r > n$.

$$CR_r^n = C_r^{n+r-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!\ ([n+r-1]-r)!} = \frac{(n+r-1)!}{r!\ (n-1)!}$$

En una urna se tienen seis esferas diferentes ¿Cuántas combinaciones de cuatro esferas, con repetición, se pueden formar?

$$CR_4^6 = \frac{(6+4-1)!}{4!\ (6-1)!} = \frac{9!}{4!\,5!} = 126$$

o bien: $$CR_4^6 = C_4^{6+4-1} = C_4^9 = \frac{9!}{4!\,(9-4)!} = 126$$

NÚMEROS COMBINATORIOS

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Propiedades de los números combinatorios

$$\binom{n}{n} = 1; \qquad \binom{n}{0} = 1; \qquad \binom{0}{0} = 1; \qquad \binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}; \qquad \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

Ejemplos:

$$\underbrace{\binom{10}{6}}_{210} = \binom{10}{10-6} = \underbrace{\binom{10}{4}}_{210}$$

$$\underbrace{\binom{9}{5}}_{126} = \underbrace{\binom{8}{4}}_{70} + \underbrace{\binom{8}{5}}_{56}$$

TEOREMA DEL BINOMIO Y EL TRIÁNGULO DE PASCAL

Teorema del binomio: $$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

n=0	**1**							
n=1	**1**	**1**						
n=2	**1**	**2**	**1**					
n=3	**1**	**3**	**3**	**1**				
n=4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**			
n=5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**		
n=6	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**	
n=7	**1**	**7**	**21**	**35**	**35**	**21**	**7**	**1**

Proporciona los coeficientes de cada término del desarrollo del binomio; cada celda en él triángulo corresponde al número combinatorio C(n,r) donde n es el renglón y r es la posición del término, para r=0, 1, . . . ,n.

Ejemplo, para n=5:

$$(x+y)^5=x^5+5x^4y^3+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

DIAGRAMAS DE ÁRBOL

Es una técnica gráfica para encontrar el número de posibles resultados para un experimento que consta de eventos sucesivos.

Ejemplo: Al lanzar una moneda tres veces, los posibles resultados en serie se pueden contar en este árbol.