Matemáticas Platicadas

Número: 9 Marzo 2004

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

PROCESO DE BERNOULLI

Bernoulli consideró fenómenos en los cuales los experimentos tienen dos posibles resultados "éxito" o "fracaso", a los que asoció una variable aleatoria: $x = 1$ para el éxito y $x = 0$ para el fracaso y sus correspondientes probabilidades: "p" la probabilidad del éxito y "q" la probabilidad de fracaso, de tal forma que $p + q = 1$. Con estas características Bernoulli considero n experimentos, cada uno independiente de los otros, de tal manera que se mantenian constantes p y q en cada uno.

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL

El proceso de Bernoulli es la base para la distribución de probabilidad Binomial. Consideremos un proceso de producción en serie de un artículo. En particular nos interesa el número de artículos defectuosos que pueden resultar de un lote de n artículos. En este caso la variable aleatoria se asocia al número de artículos defectuosos en el lote.

E = Articulo no defectuoso $\qquad \overline{E}$ ***=Articulo defectuoso***

Consideremos el caso de $n = 3$

La probabilidad de que ninguno de los tres artículos tenga defecto es:

$$P(0) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

Por la independencia de los eventos,

$$P(0) = P(E_1)P(E_2)P(E_3) = p(p)p = p^3$$

La probabilidad de que uno de los artículos sea defectuoso es

$$P(1) = P\left[(\overline{E}_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3)\right]$$

$$= P(\overline{E}_1)P(E_2)P(E_3) + P(E_1)P(\overline{E}_2)P(E_3) + P(E_1)P(E_2)P(\overline{E}_3)$$

$$P(1) = qpp + pqp + ppq = 3p^2q$$

La probabilidad de que dos de los artículos sean defectuosos es

$$P(2) = P\left[(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3) \cup (\overline{E}_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3)\right]$$

$$= P(\overline{E}_1)P(\overline{E}_2)P(E_3) + P(E_1)P(\overline{E}_2)P(\overline{E}_3) + P(\overline{E}_1)P(E_2)P(\overline{E}_3)$$

$$P(2) = qqp + pqq + qpq = 3pq^2$$

La probabilidad de que los tres artículos sean defectuosos es:

$$P(3) = P\left(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3\right) = P\left(\overline{E}_1\right)P\left(\overline{E}_2\right)P\left(\overline{E}_3\right) = q(q)q = q^3$$

Notamos que el coeficiente y los exponentes corresponden al desarrollo del binomio de Newton, por lo que

$$\sum_{X=0}^{3} P(X) = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p+q)^3 = 1$$

ya que $\boldsymbol{p + q = 1}$ Por lo tanto, sí se trata de una distribución de probabilidad. La forma general de ésta es:

$$\boldsymbol{P(X) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots, n}$$

Se puede determinar la media correspondiente, como sigue.

$$\mu_X = E\{X\} = \sum_{\forall x} xP(x) = \sum_{\forall x} \frac{x\,n!}{x!(n-x)}\,p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{\forall x} x \frac{n(n-1)!}{x(x-1)![(n-1)-(x-1)]!}\,pp^{x-1}q^{[(n-1)-(x-1)]}$$

Haciendo un cambio de variable $y = x - 1$ con $\boldsymbol{m = n - 1}$

simplificando la expresión se reduce a

$$\mu_X = np \sum_{y=1}^{m} \frac{m!}{y!(m-y)!} p^y q^{m-y}$$

Como se demostró antes, $\sum_{\forall y} P(y) = 1$. Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\mu_X = np}$$

Mediante un procedimiento similar para $E\{X^2\}$, se obtiene que la varianza es: $\boldsymbol{\sigma^2 = npq}$

Ejemplo: Sea una máquina ensambladora de chips, que produce un 10% de piezas defectuosas.

a) Si se extrae al azar un chip de un lote de 30 piezas, calcular la probabilidad de que sea defectuoso.

b) Si se extraen al azar dos chips de un lote de 30 piezas, calcular la probabilidad de que sean defectuosos.

c) Determinar la media y la varianza de la distribución.

Solución

Identificación de datos para el inciso a)

$n = 30 \quad p = 0.1 \quad q = 0.9 \quad y \quad x = 1$

$$P(1) = \binom{30}{1}(0.1)^1(0.9)^{29} = 30(0.1)(0.047) = 0.1413$$

Lo que significa que hay una probabilidad de 14.13% de que el chip sea defectuoso.

Identificación de datos para el inciso b)

$n = 30 \quad p = 0.1 \quad q = 0.9 \quad y \quad x = 2$

$$P(2) = \binom{30}{2}(0.1)^2(0.9)^{28} = 15(29)(0.01)(0.0523) = 0.2276$$

Lo que significa que hay una probabilidad de 22.76% de que los dos chips sean defectuosos.

c) $\mu_X = np = 30(0.1) = 3 \quad \sigma^2 = npq = 30(0.1)(0.9) = 2.7$

Ejemplo: Una fábrica de llantas para automóvil suministra llantas a diez distribuidoras, la probabilidad de que una distribuidora llame y haga un pedido en determinado día es de 0.2, y es la misma para las diez distribuidoras. Calcular la probabilidad de que en determinado día, el número de distribuidoras que llame para hacer un pedido sea: a) cuando mucho tres, b) cuando menos tres.

Solución

Asociamos la variable aleatoria X al número de distribuidoras que llaman para hacer un pedido en un día determinado, el llamado de cada distribuidora es independiente del llamado de las otras.

Identificación de datos:

$n = 10 \quad p = 0.2 \quad y \quad q = 0.8$

a) $$P(X \le 3) = \sum_{x=0}^{3} P(x) = \sum_{x=0}^{3} \binom{10}{x}(0.2)^x(0.8)^{10-x} = 0.897$$

Se puede calcular la suma u obtener el valor a través de tablas de la función de probabilidad acumulada

b) como $P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \le 2)$

$$P(X \ge 3) = 1 - \sum_{x=0}^{2} \binom{10}{x}(0.2)^x(0.8)^{10-x} = 1 - 0.678 = 0.322$$

continuará...

Ing. Marco Antonio Gómez Rámirez

APLICACIONES DEL CÁLCULO DIFERENCIAL AL ANÁLISIS DEL ESTADO DE ESFUERZO PLANO

Presentamos este artículo una aplicación del tema de máximos y mínimos del cálculo diferencial, para la determinación de las direcciones principales de esfuerzo en un estado de esfuerzo plano.

El esfuerzo cortante en un análisis bidemensional está dado por

$$\tau = \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\right] sen2\alpha - \tau_{xy}\cos 2\alpha \qquad (1)$$

Por definición, en un plano principal el esfuerzo cortante vale cero. Sustituyendo en la ecuación 1

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)} \qquad (2)$$

La ecuación 2 proporciona la dirección del vector normal a un plano principal; sabemos, de la observación del círculo de Mohr, que en el análisis bidimencional existe un plano donde se presenta el máximo esfuerzo normal y el esfuerzo cortante vale cero -llamado plano principal mayor-, y un plano donde ocurre el mínimo esfuerzo normal y el esfuerzo cortante vale cero -denominado plano principal menor-. Las direcciones normales a los planos principales son las direcciones principales mayor y menor, respectivamente; así ¿la dirección dada por la ecuación 2 corresponde a una dirección principal mayor o a una dirección principal menor? Para responder a esta pregunta, podemos hacer uso del concepto de máximos y mínimos del cálculo diferencial. Obtengamos los valores extremos del esfuerzo normal σ el cual, de acuerdo con la mecánica de sólidos está dado por

$$\sigma = \frac{\left(\sigma_x + \sigma_y\right)}{2} + \frac{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\alpha}{2} + \tau_{xy}\, sen2\alpha \qquad (3)$$

Derivando con respecto al ángulo α

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) sen2\alpha + 2\tau_{xy}\cos 2\alpha \qquad (4)$$

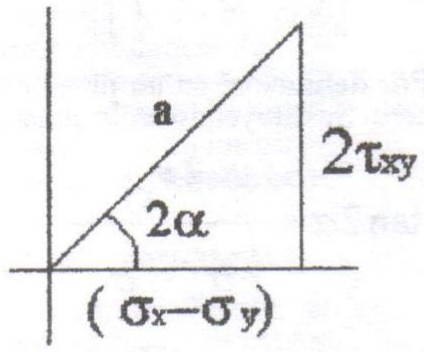
$$\frac{d^2\sigma}{d\alpha^2} = -2(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha - 4\tau_{xy} sen2\alpha \qquad (5)$$

Para obtener la dirección del máximo esfuerzo normal igualamos la ecuación 4 a cero

$$-(\sigma_x - \sigma_y) sen2\alpha + 2\tau_{xy}\cos 2\alpha = 0$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)} \qquad (6)$$

Las ecuaciones 2 y 6 son iguales, por lo que la dirección del vector normal al plano principal corresponde a la dirección de un esfuerzo principal. Para saber si se trata del esfuerzo principal mayor o el esfuerzo principal menor, debemos revisar el signo de la segunda derivada por la ecuación 5. Para esto, pongamos el ángulo 2α en función de $2\tau_{xy}$ y de $\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{a}$ como se muestra en la figura. Así



$$sen 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{a}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{a}$$

siendo

$$a = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}{}^2} > 0$$

Remplazando en la ecuación 5

$$\frac{d^2\sigma}{d\alpha^2} = \frac{\left[-2(\sigma_x - \sigma_y)^2 - 8\tau_{xy}{}^2\right]}{a} \qquad (7)$$

Dado que a>0, la segunda derivada de σ en la ecuación 7 es siempre negativa, pues

$$-2\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 - 8\tau_{xy}{}^2 \quad < 0$$

Cuando la segunda derivada de una función es negativa, la función alcanza un máximo. Por lo tanto, el ángulo 2α dado por la ecuación 6 proporciona siempre el máximo de σ, es decir, arroja el valor del esfuerzo principal mayor. Así

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)} \qquad (8)$$

Continuará...

M en I. Agustín Deméneghi Colina

NIÑOS

Sonrisas dibujadas en sus cuerpecitos, sonrisas mezcladas con inocencia; combinación perfecta propia de la primera edad.

Rostros libres de preocupaciones terrenas y caminar tranquilo; admirando y aprendiendo de todo a su alrededor.

Ojos brillantes que se mueven de un lado a otro, descubriendo el mundo y no rivalizando con nada, sino por el contrario formando parte apacible del murmullo y del ruido cotidiano .

Miradas profundas que penetran en los corazones más duros y maltratados, miradas que irradian sentimientos nobles como amor y ternura.

Figuritas que se mueven graciosamente de un lado a otro de la calle, jugando con todo, menos con su vida.

Hombrecitos que representan un milagro de la naturaleza, dándole un sentido a la vida de aquellas personas que los observan...

...aliviándolos por unos momentos de sus preocupaciones y haciéndolos entender, que la vida sólo se vive una vez.

Ing. Miguel Eduardo González Cárdenas

Habilidades del Pensamiento

El proceso o habilidad del pensamiento más a estudiar es "LA MEMORIA", la cual es tan importante que sin ella no se podrían realizar los otros procesos del pensamiento. Gilford señala que la memoria es la retención o almacenaje, con cierto grado de disponibilidad de la información, de la misma manera como fue almacenada y en relación con los mismos indicios con los cuales fue aprendida.

Dicho de otra manera, la memoria se puede definir como la operación intelectual que nos permite conservar y hacer revivir en la mente los estados de conciencia, como placeres y dolores, inclinaciones y pasiones, sensaciones y percepciones, ideas y juicios, y que nos da además la posibilidad de reconocerlos y relacionarlos con el pasado.

Ejercicio: Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Recuerdas el teorema de Pitágoras? Escríbelo
2. ¿Cuándo se derrumbó el muro de Berlín?
3. ¿En qué año, el hombre llegó a la luna?
4. ¿Cuál es el océano de mayor superficie?
5. ¿En que año nació tú padre?
6. ¿Cuál es la fórmula para resolver ecuaciones de 2° grado?

Respuestas del ejercicio anterior:
Los números que están cambiados son el 5 y el 10.

Lic. Martha Rosa Del Moral Nieto