ÁLGEBRA LINEAL EN EL CONTEXTO DE INGENIERÍA CIVIL

Duarte Ramos Ramón Enrique
Universidad Autónoma de Sinaloa

Jesús Alfonso Riestra Velázquez
Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav IPN

Resumen

Los cursos y textos de Álgebra Lineal son muy abstractos y ofrecen, en el mejor de los casos, problemas de aplicación muy artificiales, ajenos al área de conocimiento en la que se van a aplicar; sostenemos que enfocando el curso de Álgebra Lineal en el contexto en el cual se va a utilizar contribuiríamos a que el alumno se motive y a la vez se vaya introduciendo a las materias específicas de ingeniería, como el Análisis de Estructuras por ejemplo, materia de ingeniería civil donde existe un uso abundante de sistemas de ecuaciones y matrices.

En esta ponencia presentamos un problema de aplicación de los sistemas de ecuaciones y matrices el cual consiste en un sistema estructural compuesto por 4 barras coplanares que cuelgan de un techo horizontal unidas a éste mediante articulaciones; además están unidas entre sí mediante otra articulación (ver figura 1). Se trata de encontrar las fuerzas axiales en las 4 barras cuando sometemos al sistema estructural a dos cargas: una carga horizontal P_1 y otra vertical P_2, ambas aplicadas en la unión común de las barras. Aplicando las condiciones de equilibrio de la unión común se llega a $A\{N\} = \{P\}$, donde A es una matriz de $2{\times}4$ con los cosenos directores de las barras, $\{N\}$ una matriz columna $4{\times}1$ con fuerzas axiales de las barras y $\{P\}$ el vector columna $2{\times}1$ de cargas aplicadas. Las relaciones de compatibilidad geométrica conducen a $A^t\{\delta\}=\{\Delta\}$, donde A^t es la transpuesta de A, $\{\Delta\}$ matriz columna de las deformaciones en las barras y $\{\delta\}$ el vector columna de las componentes rectangulares del desplazamiento de la unión común. Por último, las relaciones entre fuerzas axiales y deformaciones de las barras (ley de Hooke), nos conducen a $\{N\}=[k]\{\Delta\}$ donde $[k]$ es una matriz diagonal de $4{\times}4$ con $k_{ii}= k_i$, la constante elástica de la barra i. Combinando adecuadamente estas tres ecuaciones obtenemos la matriz $\{N\}$.

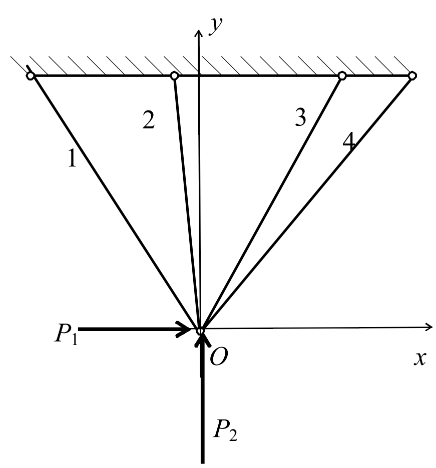

Figura 1 Problema de Navier: Sistema estructural con 4 barras

Nuestra preocupación es la enseñanza del Álgebra Lineal en el contexto en la ingeniería civil. Es común que el maestro de las materias específicas de ingeniería no incluya en sus cursos los principios que subyacen a los algoritmos y reglas prácticas empleados en la solución de problemas; aunado a esto el maestro de las materias básicas las presenta en forma abstracta carente de significado.

El problema de Navier que presentamos en este trabajo se aborda en los cursos de Mecánica de Materiales ofreciendo una magnífica oportunidad de aplicar Álgebra Lineal permitiéndonos ilustrar ideas importantes de sistemas de ecuaciones y matrices. Este problema se refiere a un sistema estructural compuesto por 4 barras (puede ser cualquier número de barras) colgadas de un techo y unidas a una articulación común, en donde se aplican dos cargas P_1 y P_2; se pide determinar las fuerzas en las barras.
Las fuerzas internas $N_1,..,N_4$ de las barras pueden expresarse en función de las cargas P_1 y P_2 mediante el equilibrio del punto *O*. En la figura 2 se muestran las fuerzas que actúan en este punto; los signos negativos se deben a que las fuerzas en las barras, las cuales estamos suponiendo positivas a compresión, en el nudo aparecen de sentidos opuestos (tercera ley de Newton). Utilizando las condiciones de equilibrio

$$\begin{aligned}(-N_1)\cos\alpha_1+(-N_2)\cos\alpha_2+(-N_3)\cos\alpha_3+(-N_4)\cos\alpha_4+P_1=0\\(-N_1)\cos\beta_1+(-N_2)\cos\beta_2+(-N_3)\cos\beta_3+(-N_4)\cos\beta_4+P_2=0\end{aligned}; \qquad (1)$$

ó en forma matricial

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 & \cos\alpha_4\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 & \cos\beta_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1\\N_2\\N_3\\N_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}, \qquad (2)$$

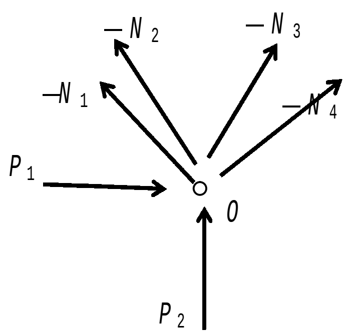

Figura 2 Equilibrio del nudo

donde $\cos\alpha_i, \cos\beta_i$ son los cosenos directores del segmento dirigido que une *O* con el otro extremo de la barra[1] *i* ($i=1,\dots,4$); lo que hace que las fuerzas de compresión sean positivas y las de tensión negativas[2].
Observemos que el sistema de ecuaciones dado por (1) es compatible e indeterminado (se dice que el sistema estructural es estáticamente indeterminado o hiperestático). Para convertir el sistema de ecuaciones en compatible determinado obtendremos ecuaciones a partir del análisis de la deformación del sistema estructural.
Definiendo las matrices *A*, $\{N\}$ y $\{P\}$ como

[1] Recordemos que los cosenos directores de un vector (o un segmento dirigido) son los cosenos de los ángulos directores. Un ángulo director de un vector de posición es el menor ángulo formado por él y el lado positivo de alguno de los ejes; suele llamarse α si es con el eje *x* y β, con el eje *y* (no tienen por qué ser complementarios). Si el vector no es de posición, es decir, su origen no es el origen del sistema de coordenadas cartesiano, sus ángulos directores se definen como los correspondientes al vector de posición paralelo a él.
[2] Aunque no es la convención usual, pues generalmente las fuerzas de tensión se consideran positivas y las de compresión negativas, resulta conveniente cambiar esta convención; pues si adoptamos la convención usual tendríamos que tomar los cosenos directores de los segmentos dirigidos del extremo fijo en la pared al punto *O* (ver figura 2).

$$A=\begin{bmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 & \cos\alpha_4\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 & \cos\beta_4\end{bmatrix},\qquad \{N\}=\begin{bmatrix}N_1\\ N_2\\ N_3\\ N_4\end{bmatrix}\qquad \text{y}\qquad \{P\}=\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\end{bmatrix}.$$

La ecuación anterior puede escribirse como

$$A\{N\}=\{P\}. \qquad (3)$$

En la figura 3 se ha representado la deformación Δ_3 de la barra 3 (*O′* es la posición final del punto *O*). Supongamos que la barra 3 se alargó de manera que su extremo ocupa la posición *B*; una vez producido este alargamiento, rotamos esta barra en torno a la articulación del techo, sustituyendo el arco circular por su tangente en *B* hasta intersectar otro arco descrito por otra barra[3]. Dicha intersección es por supuesto la posción final del punto *O*, que es *O′*; en estas condiciones, obtengamos el alargamiento Δ_3 en función de las componetentes δ_1 y δ_2 del desplazamiento OO' (para las otras 3 barras se sigue un razonamiento similar). Para ello, proyectemos estas componentes en la dirección de la barra 3 (ver inciso *b* de la figura 3); si *C* es la proyección del vector δ_1 y *D* el extremo final de este vector, el ángulo $COD=\alpha_3$, el cual es congruente con $BO'D$, pues cada lado del primer ángulo es perpendicular a un lado del otro.

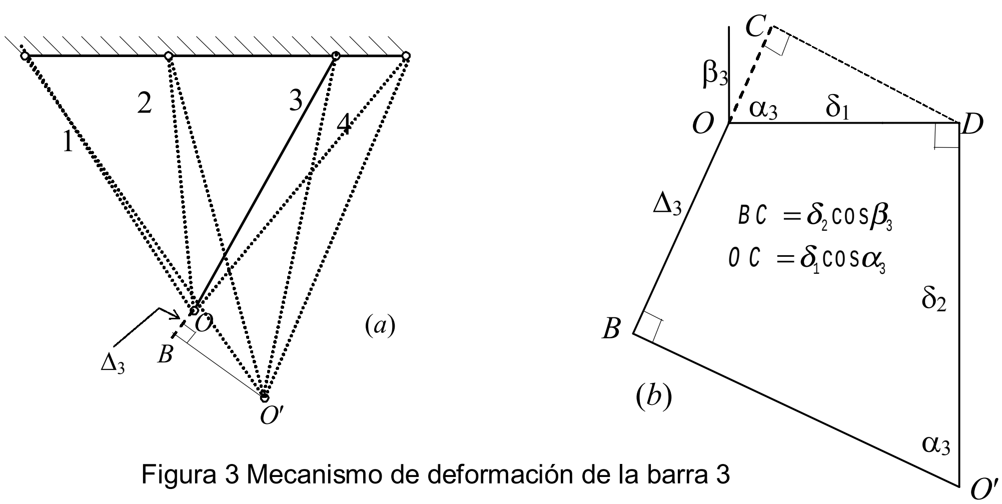

Figura 3 Mecanismo de deformación de la barra 3

El ángulo recto con vértice *B* que aparece en la figura 3 se debe a que estamos sustituyendo el arco circular que describe el extremo de la barra 3 deformada, al rotarlo con respecto al extremo fijo en la pared. De esta manera, la fórmula para deformación de la barra 3, Δ_3, se obtiene restando la proyección de δ_2 sobre la barra 3 de la de δ_1:

$$\Delta_3=-\left[\left(-\delta_2\operatorname{sen}\alpha_3\right)-\delta_1\cos\alpha_3\right]=\delta_1\cos\alpha_3+\delta_2\cos\beta_3,$$

[3] La sustitución de arcos circulares por la tangente en su extremo inicial se fundamenta en el hecho de que los desplazamientos son muy pequeños y pueden considerarse como los infinitésimos del Cálculo Infinitesimal.

la cual es general. Para convencernos de este hecho recurramos a la transformación de coordenadas. Las componentes del vector desplazamiento OO' pueden representarse de acuerdo a un sistema de coordenadas definido por las fuerzas P_1 y P_2 ó con uno definido por OC y BO' con origen en O (ver figura 3*b*). Las componentes de este vector respecto al primer sistema (o coordenadas del punto O') son δ_1 y δ_2. Si α y β son los ángulos directores de OC con respecto al determinado por las cargas P_1 y P_2, obtengamos las componentes del vector OO' (o coordenadas del punto O') con respecto al segundo sistema coordenado. Para ello, utilizaremos las fórmulas transformación de coordenadas por rotación de ejes; dichas fórmulas establecen que la coordenada de un punto A' (o componente del vector AA') a lo largo de un eje es igual a la suma de los productos de las coordenadas del punto respecto a los ejes originales multiplicados por los cosenos directores del nuevo eje con respecto a los ejes originales; o en términos de vectores la componente de un vector a lo largo de un eje es igual a la suma algebraica de las componentes del vectores a lo largo del eje. Entonces, podemos escribir que

$$\Delta_i = \delta_1 \cos\alpha + \delta_2 \cos\beta \ ,$$

que es la misma fórmula antes para $i = 3$ utilizando recursos geométricos.
Para las cuatro 4 barras obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_1 \cos\alpha_1 + \delta_2 \cos\beta_1 \\ \Delta_2 &= \delta_1 \cos\alpha_2 + \delta_2 \cos\beta_2 \\ \Delta_3 &= \delta_1 \cos\alpha_3 + \delta_2 \cos\beta_3 \\ \Delta_4 &= \delta_1 \cos\alpha_4 + \delta_2 \cos\beta_4 \end{aligned} \qquad (4)$$

ó

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 \\ \cos\alpha_4 & \cos\beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Definamos las matrices $\{\Delta\}$ y $\{\delta\}$ como

$$\{\Delta\} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix}, \qquad \{\delta\} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}.$$

Con lo que podemos escribir la ecuación matricial, dada por (5), en forma más compacta:

$$\{\Delta\} = A^t \{\delta\}, \qquad (6)$$

que es la llamada relación de compatibilidad geométrica.
Aplicando la ley de Hooke para cada barra podemos establecer que

$$\begin{aligned} N_1 &= k_1\Delta_1 \\ N_2 &= k_2\Delta_2 \\ N_3 &= k_3\Delta_3 \\ N_4 &= k_4\Delta_4 \end{aligned} \qquad (7)$$

siendo k_i la constante de rigidez de la barra *i*, dada por $k_i = E_i A_i / l_i$, donde E_i es el módulo de elasticidad del material, A_i el área de la sección transversal de la barra y l_i su longitud. La constante de rigidez k_i puede interpretarse como la fuerza que, aplicada a la barra *i*, le produce un desplazamiento unitario. Las relaciones fuerza deformación, dadas por (7), puede representarse matricialmente de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Considerando

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

podemos escribir que

$$\{N\} = [k]\{\Delta\}. \qquad (9)$$

Hemos obtenido un sistema de ecuaciones de ecuaciones (compatible determinado) compuesto por las 10 incógnitas: $N_1, N_2, N_3, N_4, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \delta_1, \delta_2$ con 10 ecuaciones: 2 de las condiciones de equilibrio (ecuación 1), 4 de las relaciones de compatibilidad geométrica (ecuación 4) y las últimas 4 provienen de la ley de Hooke (ecuación 7). Resolvamos este sistema de ecuaciones procediendo matricialmente. Para tal efecto reescribamos las ecuaciones matriciales (3), (6) y (9):

$$A\{N\} = \{P\} \qquad \{\Delta\} = A^t\{\delta\} \qquad \{N\} = [k]\{\Delta\}$$

Sustituyamos la segunda ecuación en la tercera; lo que da $\{N\} = [k]\{\Delta\} = [k]A^t\{\delta\}$; ahora sustityamos este resultado en la primera: $A\{N\} = A[k]A^t\{\delta\} = \{P\}$. Definiendo $S = A[k]A^t$ (*S* se conoce con el nombre de matriz de rigidez) podemos escribir esta última fórmula en una forma más simple: $S\{\delta\} = \{P\}$. Finalmente, los desplazamientos δ_1 y δ_2 del punto *O* pueden obtenerse como $\{\delta\} = S^{-1}\{P\}$; siendo $S^{-1} = F$ la matriz inversa de *F* y recibe el nombre de matriz de flexibilidad del sistema estructural. Veamos que la matriz de rigidez es simétrica:

$$S^t = \left(A[k]A^t\right)^t = \left(A^t\right)^t \left(A[k]\right)^t = A[k]^t A^t$$

pero la matriz de constantes elásticas $[k]$ es una matriz diagonal y por ello $[k]^t = [k]$ es simétrica[4]; por lo que $S^t = S$. También la matriz de flexibilidad *F* es simétrica, ya que por un lado $SF = I$; de donde $F^t S^t = I$. Por ser *S* una matriz simétrica $S^t = S$, luego $F^t S = I$. Por otra parte, de $FS = I$ se llega a que $SF^t = I$. Las relaciones obtenidas $F^t S = I$ y $SF^t = I$ implican que la inversa de *S*, o sea *F*, es igual a la matriz F^t. En consecuencia, $F = F^t$ y la matriz *F* también es simétrica.

Resumiendo, para el sistema estructural con las cuatro barras, los desplazamientos $\{\delta\}$ del punto *O* se obtienen con la fórmula $\{\delta\} = F\{P\}$ donde $F = S^{-1} = \left(A[k]A^t\right)^{-1}$. Enseguida, podemos calcular las fuerzas en las barras, dadas por la matriz $\{\Delta\}$, de acuerdo a la ecuación $\{\Delta\} = A^t\{\delta\}$. Finalmente, las fuerzas en las barras $\{N\}$ pueden obtenerse de las relaciones fuerza deformación $\{N\} = [k]\{\Delta\}$; quedando así resuleto el problema de Navier. En general, la solución de un problema de análisis de estructuras estáticamente indeterminadas se realiza en tres etapas: equilibrio, relaciones de compatibilidad geométrica y relaciones fuerzas deformación (ley de Hooke).

Una manera más práctica de determinar los coeficientes de rigidez (elementos de la matriz de rigidez) de *S* en la ecuación $S\{\delta\} = \{P\}$ consiste en lo siguiente. Observando que existe una relación lineal entre los desplazamientos y las cargas, se cumple superposición; esto significa que la deformación final que consiste en los desplazamientos δ_1 y δ_2 puede obtenerse como la superposición de uno sobre el otro; o sea que se produce solamente δ_1 (en esta etapa $\delta_2 = 0$) y después y en encima de este se aplica δ_2 (ver figura 4).

Apliquemos un desplazamiento unitario en la dirección δ_1 y sean S_{i1} las fuerzas aplicadas en el nudo *O* y en las direcciones *x* e *y* que lo causan[5]. Similarmente aplicamos un desplazamiento en las direcciones de P_1 y P_2 que lo generen. Aplicando las condiciones de equilibrio tendremos que

$$S_{11}\delta_1 + S_{12}\delta_2 = P_1$$
$$S_{21}\delta_1 + S_{22}\delta_2 = P_2$$

tal y como se muestra en la figura 5.

ó en forma matricial

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

[4] Físicamente puede demostrarse que la matriz de rigidez *S* es simétrica aplicando el teorema de los trabajos recíprocos de Maxwell, el cual se estudia en Análisis Estructural.
[5] Método de las rigideces del Análisis Estructural.

S_{ij} es el coeficiente de rigidez y representa la fuerza en la dirección *i* cuando se provoca un desplazamiento en la dirección *j*. Cálculo de los coeficientes de rigidez.

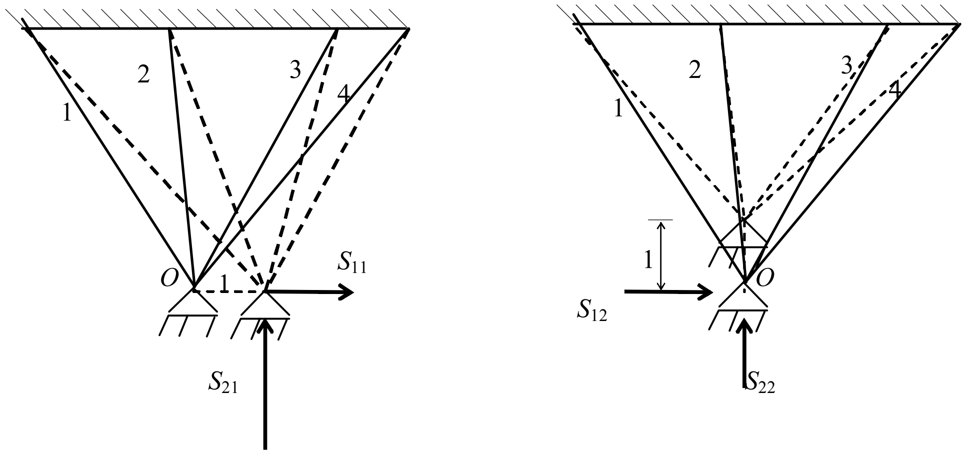

Figura 4 Coeficientes de rigidez de la armadura para cada uno de los grados de libertad.

Veamos cómo se calculan los coeficientes de rigidez. Se considera que el extremo *i* de la barra *ij* está fijo; calcularemos las componentes en las direcciones *x* y *y* de la fuerza axial que se genera al provocar un desplazamiento unitario horizontal y otro vertical.

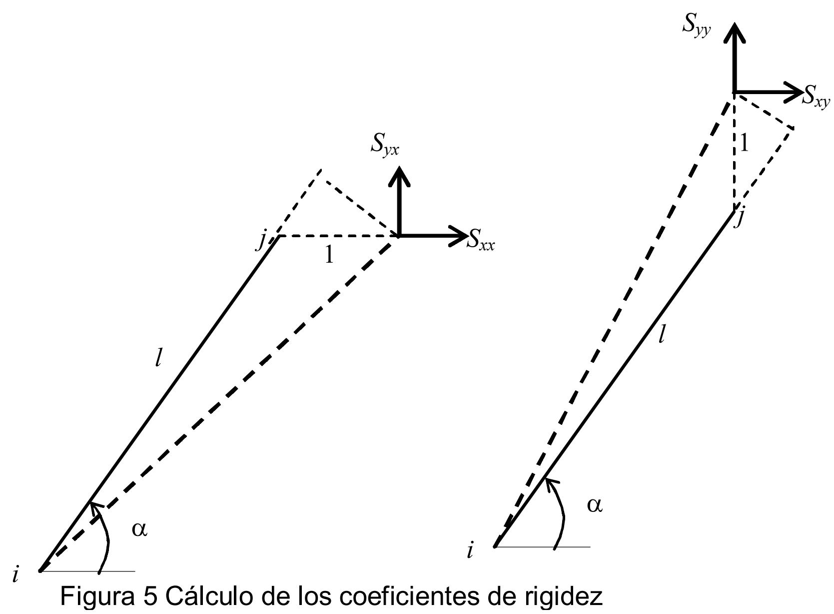

Figura 5 Cálculo de los coeficientes de rigidez

Al aplicar un desplazamiento unitario horizontal (ver figura 5), la barra se deforma $1 \cdot \cos\alpha$, induciendo una fuerza axial de tensión $N = EA\cos\alpha/l$. Si S_{xx} , S_{yx} son las componentes en las

direcciones *x* e *y* respectivamente cuando se produce un desplazamiento unitario en la dirección *y*, tenemos que

$$S_{xx} = N\cos\alpha = EA\cos^2\alpha/l \, , \; S_{yx} = N\,\text{sen}\alpha = EA\,\text{sen}\alpha\,\cos\alpha/l \, .$$

Observemos que la convención de signos no es la misma que la anterior puesto que ahora las tensiones son positivas y las compresiones negativas; similarmente, $N = EA\,\mathrm{sen}\alpha/l$ es la fuerza axial de tensión que se genera en la barra cuando se produce un desplazamiento unitario vertical, con lo que las fuerzas o rigideces correspondientes son

$$S_{xy} = N\cos\alpha = EA\,\mathrm{sen}\alpha\,\cos\alpha/l\,,\quad S_{yy} = N\cos\alpha = EA\,\mathrm{sen}^2\alpha/l$$

Lo anterior se hace para cada una de las barras. De esta manera, hemos presentado el problema de Navier para el caso de 4 barras, aplicando en forma importante el álgebra matricial. Aunque parezca contradictorio, hoy en día con la invasión de los programas de computadoras y en general de las computadoras y calculadoras programables se exige un mayor dominio de las matemáticas ya que para elaborar un programa de computadoras se necesita que el método que se implemente en un algoritmo sea de carácter general. Lo cual sucede en este problema con el auxilio de los cosenos directores y en general de la geometría analítica.

BIBLIOGRAFÍA:

GONZÁLEZ, Óscar. 2002. *Análisis Estructural*. México, D. F.: Editorial Limusa. S. A. de C. V. & Grupo Noriega Editores.

LUTHE, Rodolfo. 1971. *Análisis Estructural.* México: Representaciones y Servicios de Ingeniería, S. A.

NOBLE, Ben & DANIEL, James. 1989. *Álgebra Lineal Aplicada.* México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A.

RIESTRA, Jesús & DUARTE, Ramón. 2003. *Revising the foundations and proving the two classical Castigliano's theorems using elementary Linear Algebra.* México. Artículo de investigación (en proceso)

TIMOSHENKO & YOUNG. 1985. *Teoría de las Estructuras*. México: Elcano, S. A.