RAÍCES Y EXPONENTES FRACCIONARIOS

Definición:

La raíz de orden n de un número a es un número x tal que al elevarlo a la potencia n se obtiene el número a.

$$x = \sqrt[n]{a}$$

$$x^n = a$$

Ejemplo 1:

Una raíz cuadrada de 36 es 6 porque al elevar al cuadrado 6 se obtiene 36, también –6 es una raíz cuadrada de 36 por el mismo motivo.

Ejemplo 2:

La raíz cúbica de 27 es 3 porque al elevar al cubo 3 se obtiene 27.

Ejemplo 3:

La raíz cuarta de 625 es 5 porque al elevar a la cuarta 5 se obtiene 625.

Ejemplo 4:

La raíz cúbica de -125 es -5 porque al elevar al cubo -5 se obtiene -125.

Un número positivo tiene dos raíces cuadradas una positiva y otra negativa, sin embargo un número negativo no tiene raíces cuadradas dentro del conjunto de los números reales, sus raíces están en el conjunto de los números imaginarios, conjunto que queda fuera del estudio de este trabajo.

Sólo los números positivos tienen raíces de orden par, esto es: raíz cuadrada, raíz cuarta, raíz sexta etc. Pero se pueden obtener raíces de orden impar tanto de números positivos como de negativos.

Raíces principales

Se llama raíz principal de orden n de un número positivo a la raíz positiva del número, la raíz principal de orden impar de un número negativo es su raíz negativa, como los números negativos no tienen raíces de orden par dentro de los números reales, no tienen raíz principal de ese orden.

Ejemplo 5:

$$\sqrt{121}$$

la raíz principal de un número positivo es un número positivo, por lo tanto la raíz principal de $\sqrt{121}$ **es** 11

Ejemplo 6:

$$\sqrt[3]{-125}$$

La raíz principal de orden impar de un número negativo es un número negativo por lo tanto la raíz principal es -5

Propiedades de las raíces

Raíz de un producto

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

Ejemplo 7:

Simplificar la expresión $\sqrt{36x^4}$

Resolución

$$\sqrt{36x^4} = \sqrt{36}\sqrt{x^4} = 6x^2$$

ya que la raíz de un producto equivale al producto de las raíces de los factores

Raíz de un cociente

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo 8:

Simplificar la expresión $\sqrt[3]{\frac{64\,x^3}{27y^6}}$

Resolución:

Al aplicar la propiedad que la raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces se obtiene

$$\sqrt[3]{\frac{64x^3}{27y^6}} = \frac{\sqrt[3]{64x^3}}{\sqrt[3]{27y^6}} = \frac{4x}{3y^2}$$

Ejemplo 9:

Simplificar la expresión $\sqrt{\frac{36\,w^4}{49\,r^2\,v^6}}$

Resolución:

Es equivalente a

$$\frac{\sqrt{36\,w^4}}{\sqrt{49\,r^2\,v^6}} = \frac{\sqrt{36}\sqrt{w^4}}{\sqrt{49}\sqrt{r^2}\sqrt{v^6}} = \frac{6\,w^2}{7\,r\,v^3}$$

Raíz de una potencia

$$\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

Ejemplo 10:

Simplificar la expresión $\sqrt[3]{\left(8w^6\right)^5}$

Resolución:

La expresión es equivalente a

$$\sqrt[3]{\left(8w^6\right)^5} = \left(\sqrt[3]{8w^6}\right)^5$$

como se puede observar para la simplificación de esta expresión conviene primero obtener la raíz y después elevarla a la potencia indicada

$$\left(2w^2\right)^5 = 32w^{10}$$

Raíz de una raíz

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Ejemplo 11:

$$\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt[4]{81}$$

La raíz cuadrada de 81 es 9 en tanto que la raíz cuarta de 81 es 3 así la raíz cuadrada de La raíz cuadrada es equivalente a la raíz cuarta

$$\sqrt{9} = 3$$

Ejemplo 12:

Simplificar la expresión : $\sqrt{x\sqrt[3]{x^3}}$

Resolución :

La expresión es equivalente a

$$\sqrt{x\sqrt[3]{x^3}} = \sqrt{\sqrt[3]{x^3x^3}}$$

por propiedades de los exponentes

$$\sqrt{\sqrt[3]{x^3 x^3}} = \sqrt[6]{x^6}$$

y es igual

$$x$$

Presentación de las raíces como exponentes fraccionarios

La raíz cúbica del número a elevada al cubo da como resultado el número a

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$$

Como se puede observar, se puede representar a la raíz como un exponente fraccionario y esta representación es consistente con las propiedades de los exponentes enteros, de tal manera que la aplicación de exponentes y raíces siguen las mismas reglas de los exponentes vistas con anterioridad.

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\frac{3}{3}}$$

$$a^1 = a$$

Las raíces de un número se pueden representar como exponentes fraccionarios

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Simplificación de expresiones con exponentes racionales

Ejemplo 13:

Simplificar la expresión $\sqrt[3]{64x^3 y^6}$

Resolución:

La expresión es equivalente a $\left(64\, x^3\, y^6\right)^{\frac{1}{3}}$

Aplicando las propiedades de los exponentes

$$4^{\frac{3}{3}} x^{\frac{3}{3}} y^{\frac{6}{3}} = 4\, x\, y^2$$

Ejemplo 14:

Simplificar la expresión $\sqrt{\dfrac{16w^4r^2}{36t^2v^6}}$

Resolución:

La expresión es equivalente a

$$\left(\frac{16\,w^4\ r^2}{36\,t^2\ v^6}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(16\,w^4r^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(36\,t^2\ v^6\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{4^{\frac{2}{2}}\ w^{\frac{4}{2}}\ r^{\frac{2}{2}}}{6^{\frac{2}{2}}t^{\frac{2}{2}}v^{\frac{6}{2}}} = \frac{4\,w^2r}{6\,t\,v^3}$$