UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

LOGARITMOS

Introducción

El empleo de los logaritmos es de gran utilidad para entender muchos de los desarrollos que se analizan en la Matemática, y para explicar una variedad muy extensa de problemas que tienen que ver con el comportamiento de la naturaleza.

Definición

"El logaritmo de un número A, es el exponente C al que hay que elevar una base B para obtener el número A" . Expresado de manera simbólica:

$$\log_B A = C$$

Según la definición, lo anterior significa que si elevamos la base B al exponente C, obtenemos el número A, esto es:

$$B^C = A$$

Es importante aclarar que lo anterior es cierto siempre y cuando la base B cumpla con ser positiva y diferente de uno, además el número A debe ser mayor estrictamente que cero.

Tener presente entonces que: $B > 0$, $B \neq 1$ y $A > 0$

Propiedades

Una consecuencia de la definición de logaritmo, son las propiedades que a continuación se enumeran:

1.- Logaritmo de la multiplicación de dos números.

$$\log_B (ab) = \log_B (a) + \log_B (b)$$

2.- Logaritmo de la división entre dos números.

$$\log_B \left(\frac{a}{b}\right) = \log_B(a) - \log_B(b)$$

3.- Logaritmo de la potencia enésima de un número.

$$\log_B (a^n) = n \log_B (a)$$

4.- Logaritmo de la raíz enésima de un número.

$$\log_B (\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \log_B (a)$$

5.- Logaritmo del recíproco de un número.

$$\log_B (a^{-1}) = - \log_B (a)$$

6.- Logaritmo de 1 en cualquier base.

$$\log_B (1) = 0$$

Otras dos propiedades que se deducen también de la definición y que tienen gran importancia son:

7.- $\log_B (B^a) = a$ **y**

8.- $B^{\log_B a} = a$

Las igualdades anteriores nos permiten resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales, como más adelante se podrá ver.

Por último se enuncia la expresión que permite cambiar el logaritmo de un número de una determinada base a cualquier otra base, también puede deducirse a partir de la definición.

9.- $$\log_B (a) = \frac{\text{Log}_C (a)}{\text{Log}_C (B)}$$

A esta expresión se le denomina cambio de base.

EJEMPLOS

Escriba las siguientes expresiones en forma de exponente, según la definición de logaritmo:

a) $\log_3 (9) = 2$
b) $\log_{10} (1) = 0$
c) $\log_4 (64) = 3$
d) $\log_2 (32) = 5$
e) $\log_5 (25) = 2$

respuestas:

a) $3^2 = 9$

b) $10^0 = 1$

c) $4^3 = 64$

d) $2^5 = 32$

e) $5^2 = 25$

Si la base de los logaritmos que se están usando es el número 10, a los logaritmos se les denomina logaritmos vulgares o de Briggs, y la forma de referirse a ellos es simplemente escribiendo log sin indicar la base, esto es; escribir $\log 100 = 2$, se sobreentiende que equivale a escribir $\log_{10}(100) = 2$.

Si la base de los logaritmos que se están empleando es el número e, se les denomina logaritmos naturales o neperianos, y la forma de referirse a ellos es simplemente escribiendo ln sin indicar la base, esto es; escribir $\ln(1) = 0$, se sobreentiende que equivale a escribir $\log_e(1) = 0$.

Claro está que todas las propiedades antes mencionadas son aplicables tanto a los logaritmos vulgares como a los logaritmos naturales.

EJEMPLOS

1).- **Emplear la definición de logaritmo para calcular el valor de x, de $\log_2(x) = -3$.**

Soluciòn: De la definición, la expresión se puede escribir como

$x = 2^{-3}$ por lo que el valor de x es $\frac{1}{8}$

2).- **Aplicar las propiedades de los logaritmos para simplificar** $\log\ 563000$

Solución: Si $\log\left(563000\right) = \log\left(563 \text{ x } 1000\right)$

Si aplicamos la propiedad que se refiere al logaritmo de una multiplicación

$$\log\left(563000\right) = \log\left(563\right) + \log\left(1000\right)$$

$$\log\left(563000\right) = \log\left(563\right) + \log\left(10^3\right)$$

Si aplicamos la propiedad 3

$$\log\left(563000\right) = \log\left(563\right) + 3\log\left(10\right)$$

Si aplicamos la propiedad 7

$$\log\left(563000\right) = \log\left(563\right) + 3$$

3).- Emplear las propiedades de los logaritmos para simplificar

$$4\ln a + \frac{\ln y}{2} - 3\ln z$$

Solución: Si aplicamos la propiedad del logaritmo de la potencia de un número

$$\ln a^4 + \frac{\ln y}{2} - \ln z^3$$

Si ahora aplicamos la propiedad de la raíz enésima de un número

$$\ln a^4 + \ln\sqrt{y} - \ln z^3$$

Si aplicamos la propiedad del logaritmo de la multiplicación de números

$$\ln\left(a^4\sqrt{y}\right) - \ln z^3$$

Si aplicamos la propiedad del logaritmo de la división de números queda

$$\boxed{\ln\frac{a^4\sqrt{y}}{z^3}}$$

4).- Calcular el valor de x que satisface la ecuación $2^{x-4}=8$, usando logaritmos.

Solución: Si aplicamos la propiedad 7, la ecuación se puede escribir

$\log_2 2^{x-4} = \log_2 8$ **por lo que**

$x-4=\log_2 8$ **, si** $8=2^3$

$$x-4=\log_2 2^3$$

Por la misma propiedad 7 queda

$x-4=3$ **por lo tanto**

$$\boxed{x=7}$$

5).- **Resolver la ecuación** $\log_2(3x+1)=2$, **usando las propiedades de los logaritmos.**

Solución: Si empleamos la propiedad 8, la ecuación queda

$2^{\log_2(3x+1)}=2^2$, **entonces se puede escribir** $3x+1=4$**, por lo tanto**

$x=1$

6).- **Por medio de las propiedades de los logaritmos calcular el valor de** $\log_4 256$**.**

Solución: Si expresamos 256 **como** 16^2**, queda** $\log_4 16^2$**.**

Por la propiedad que expresa el cambio de base de un logaritmo, se puede escribir

$$\log_4 16^2=\frac{\log_2 16^2}{\log_2 4}.$$

Si 16^2 **se escribiera como** 2^8 **y** 4 **como** 2^2**, entonces**

$$\log_4 16^2=\frac{\log_2 2^8}{\log_2 2^2}.$$

Por la propiedad 7

$$\log_4 16^2=\frac{8}{2},$$ **por lo tanto**

$\log_4 256=4$.