SENO DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS

Sean α y β dos ángulos. Al aplicar la función seno a la suma de los ángulos α y β se obtiene la siguiente identidad:

$$sen(\alpha+\beta)=sen\,\alpha\cos\beta+sen\,\beta\cos\alpha$$

Ejemplo: **Obtener el valor de $sen(105^{o})$, utilizando la identidad del seno de la suma de dos ángulos.**

Resolución

En este caso se considera que 105º =45º + 60º, de modo que

$$\begin{aligned}
sen(105^{o}) &= sen(45^{o}+60^{o})\\
&= sen(45^{o})\cos(60^{o})+sen(60^{o})\cos(45^{o})\\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

SENO DE LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

Sean α y β dos ángulos. La aplicación de la función seno al ángulo $\alpha-\beta$ da por resultado la siguiente identidad:

$$sen(\alpha-\beta)=sen\,\alpha\cos\beta-sen\,\beta\cos\alpha$$

Ejemplo: **Obtener el valor de $sen(15^{o})$, utilizando la identidad del seno de la diferencia de dos ángulos.**

Resolución

En este caso que 15º = 60º - 45º, de modo que

$$\begin{aligned} sen\,(15^{o}) &= sen(60^{o}-45^{o}) \\ &= sen(60^{o})\cos(45^{o})-sen(45^{o})\cos(60^{o}) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

COSENO DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS

Sean α y β dos ángulos. Al aplicar la función coseno al ángulo $\alpha+\beta$, se obtiene la siguiente identidad:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\,\alpha\, sen\,\beta$$

Ejemplo: **Obtener el valor de** $\cos(75^{\circ})$

Resolución

Como 75º = 45º + 30º entonces

$$\begin{aligned}\cos(75^{\circ})&=\cos(45^{\circ}+30^{\circ})\\&=\cos(45^{\circ})\cos(30^{\circ})-sen(45^{\circ})sen(30^{\circ})\\&=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\\&=\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

COSENO DE LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

Sean α y β dos ángulos. Para obtener el coseno del ángulo $\alpha-\beta$ se utiliza la identidad

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\,\alpha\,sen\,\beta$$

Ejemplo: **Utilizar la identidad anterior para obtener el valor de** $\cos(105^\circ)$

Resolución

En este caso 105º = 150º - 45º, por tanto

$$\begin{aligned}
\cos(105^\circ) &= \cos(150^\circ-45^\circ)\\
&= \cos(150^\circ)\cos(45^\circ)+sen(150^\circ)\,sen(45^\circ)\\
&= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= -\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\\
&= \frac{-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}\\
&= \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

SENO DEL DOBLE DE UN ÁNGULO

Sea α un ángulo. Para obtener $sen(2\alpha)$ se utiliza la identidad

$$sen(2\alpha) = 2\,sen\,\alpha\cos\alpha$$

Ejemplo 1: **Comprobar numéricamente que $sen(90^o) = 2sen(45^o)\cos(45^o)$**

Resolución

Como $sen\,(90^o) = 1,\ sen(45^o) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **y** $\cos(45^o) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$**, entonces**

$$\begin{aligned} sen(90^o) &= 2\,sen(45^o)\cos(45^o) \\ 1 &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ 1 &= 2\left(\frac{2}{4}\right) \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 2: **Utilizar la identidad trigonométrica del seno de un ángulo doble para calcular $sen(120^o)$**

Resolución

Como 120º = 2(60º) entonces

$$\begin{aligned} sen(120^o) &= sen(2(60^o)) \\ &= 2\,sen(60^o)\cos(60^o) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

COSENO DEL DOBLE DE UN ÁNGULO

Sea α un ángulo. Para calcular el coseno del ángulo 2α se puede utilizar cualquiera de las tres identidades siguientes:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\,sen^2\alpha$$

Ejemplo: **Calcular $\cos(120^o)$ utilizando cada una de las identidades anteriores.**

Resolución

Utilizando $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$

$$\begin{aligned}\cos(120^o) &= \cos(2(60^o)) \\ &= \cos^2(60^o) - sen^2(60^o) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \\ &= -\frac{2}{4} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Utilizando $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

$$
\begin{aligned}
\cos(120^\circ) &= \cos(2(60^\circ)) \\
&= 2\cos^2(60^\circ) - 1 \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \\
&= 2\left(\frac{1}{4}\right) - 1 \\
&= \frac{1}{2} - 1 \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Utilizando $\cos(2\alpha) = 1 - 2\,sen^2\alpha$

$$
\begin{aligned}
\cos(120^\circ) &= \cos(2(60^\circ)) \\
&= 1 - 2\,sen^2(60^\circ) \\
&= 1 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
&= 1 - 2\left(\frac{3}{4}\right) \\
&= 1 - \frac{3}{2} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$