FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS DE LA FORMA

$$a^n \pm b^n$$

Introducción

El empleo de las presentes factorizaciones es de gran utilidad en los desarrollos de los productos notables, que son fundamentales en el estudio del álgebra elemental.

Se contemplan los siguientes casos:

I. $a^n - b^n$ es divisible entre $a - b$ siendo n par o impar
II. $a^n + b^n$ es divisible entre $a + b$ siendo n impar
III. $a^n - b^n$ es divisible entre $a + b$ cuando n es par

Tener presente que $a^n + b^n$ nunca es divisible entre $a - b$

Veamos algunos ejemplos donde se ilustren los casos anteriores.

Ejemplos.

1.- **Factorizar** $m^5 + n^5$

Solución: **Por el caso II caso sabemos que es divisible entre** $m + n$, **por lo que**

$$\frac{m^5 + n^5}{m + n} = m^4 - m^3 n + m^2 n^2 - m\, n^3 + n^4$$

Entonces, la factorización queda:

$$m^5 + n^5 = \left(m + n\right)\left(m^4 - m^3 n + m^2 n^2 - m\, n^3 + n^4\right)$$

2.- **Factorizar** $m^5 + 32$,

Solución: Por el caso **II** sabemos que es divisible entre $m+2$, ya que 32 puede escribirse como 2^5,

$$\frac{x^5 + 2^5}{x+2} = x^4 - x^3(2) + x^2(2^2) - x(2^3) + 2^4$$

Si despejamos entonces queda factorizado como:

$$x^5 + 32 = (x+2)\left(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16\right)$$

3.- **Factorizar** $a^5 - b^5$

Solución: Sabemos que es divisible entre $a - b$ por el caso **I**, lo que significa poder escribirlo como

$$\frac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4$$

que al representarlo en sus factores queda:

$$a^5 - b^5 = (a-b)\left(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4\right)$$

4.- **FactorIzar** $x^7 - 1$

Solución: Sabemos que es divisible entre $x-1$, por lo indicado en el caso **I**.

$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = x^6 + x^5(1) + x^4(1^2) + x^3(1^3) + x^2(1^4) + x^1(1^5) + (1^6)$$

por lo que la factorización pedida es:

$$x^7 - 1 = (x-1)\left(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)$$

5.- **Factorizar** $x^3 - 1$

Solución: **El caso I nos indica que es divisible entre** $x-1$, **por lo que**

$$\frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x(1) + (1)$$

entonces, factorizado se puede escribir como:

$$\boxed{x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)}$$

6.- **Factorizar** $x^3 + 1$

Solución: **Por lo indicado en el caso II, sabemos que es divisible entre** $x+1$, **entonces**

$$\frac{x^3+1}{x+1} = x^2 - x(1) + (1)$$

La factorización queda:

$$\boxed{x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)}$$

7.- **Factorizar** $x^4 - y^4$

Solución: **Es aplicable el caso III, por lo que es divisible entre** $x + y$, **entnces**

$$\frac{x^4 - y^4}{x+y} = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$$

que al despejar queda factorizado como:

$$\boxed{x^4 - y^4 = (x+y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)}$$

8.- **Factorizar** $x^6 - 64$

Solución: **Sabemos por el caso III, que es divisible entre** $x + 2$**, ya que se puede escribir como** $x^6 - 2^6$**, entonces**

$$\frac{x^6 - 2^6}{x + 2} = x^5 - x^4 2 + x^3 2^2 - x^2 2^3 + x 2^4 - 2^5$$

De donde

$$x^6 - 2^6 = (x + 2)\left(x^5 - x^4 2 + x^3 2^2 - x^2 2^3 + x 2^4 - 2^5\right)$$

Por lo que la factorización queda:

$$x^6 - 64 = (x + 2)\left(x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32\right)$$

De lo obtenido en los ejercicios anteriores, se puede hacer la siguiente

Observación:

Expresiones que corresponden a los casos $x^n + y^n$ **o** $x^n - y^n$ **en que** n **es impar y múltiplo de** 3**, como** $x^3 + y^3$**,** $x^3 - y^3$**,** $x^9 + y^9$**,** $x^9 - y^9$**,** $x^{15} + y^{15}$**,** $x^{15} - y^{15}$**, pueden descomponerse por el método anteriormente expuesto o bien, como suma o diferencia de cubos. Generalmente es más rápido esto último.**

Las expresiones de la forma $x^n - y^n$ **en que** n **es par, como** $x^4 - y^4$**,** $x^6 - y^6$**,** $x^8 - y^8$ **son divisibles por** $x + y$ **o** $x - y$**, pueden descomponer se por el método anterior, pero mucho más fácil es factorizarlas como una diferencia de cuadrados.**