Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas
CÁLCULO VECTORIAL
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO

Universidad Nacional Autónoma de México

TIPO C

Semestre: 2017-2 Duración máxima: 2 horas

Nombre: ______________________________ No. de cuenta: ____________

---

1. **Empleando el método de multiplicadores de Lagrange, obtener el punto P del plano $2x-2y+z=4$ que se encuentra más cercano al origen y calcular la distancia entre éstos.**

15 PUNTOS

---

2. **Calcular los valores de las constantes a y b, de tal manera que la función**

$$\phi(x,y,z)=ax^3y+bxy^3+\frac{z^3}{3}+bx^2z$$

sea armónica.

15 PUNTOS

---

3. **Sea la curva de ecuación**

$$\bar{r}(t)=(3-2t)\hat{i}+(t^2-4t)j+(2t-1)k$$

Determinar:

a) **Si la curva $\bar{r}(t)$ se encuentra contenida en un plano.**
b) **La curvatura en el plano dado por $t=2$**
c) **El radio de torsión en cualquier punto.**

20 PUNTOS

4. Calcular $\displaystyle\int_C 8x\sqrt{x^2-1}\ dx - 2x\sqrt{y^2-4}\ dy$ **para**

la curva $C:\begin{cases} x = sen\,\theta \\ y = 2\cos\theta \end{cases}$

15 PUNTOS

---

5. Emplear el teorema de Stokes para evaluar $\displaystyle\int_C \overline{F} \bullet d\overline{r}$ **, si** C **está orientada en el sentido contrario a las manecillas del reloj.**

Donde: $\overline{F}(x,y,z) = xy\hat{i} + 2z\,j + 3yk$ **y** C **es la curva de intersección del plano** $x+z=5$ **y el cilindro** $x^2+y^2=9$**.**

20 PUNTOS

---

6. Calcular el flujo neto del campo vectorial $\overline{F}(x,y,z) = 3x^2\hat{i} - 6xy\,j + z^2k$ **que atraviesa una esfera de radio** 1 **con centro en el origen.**

15 PUNTOS

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
Cálculo Vectorial
Solución Primer Examen Final
Semestre: 2017-2
TIPO C y D

1.

Se desea minimizar la distancia $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *sujeta a* $2x-2y+z-4=0.$

Para facilitar el problema se considera $d^2=x^2+y^2+z^2$, por lo que la función de Lagrange es: $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\lambda(2x-2y+z-4)$

Luego, el sistema de ecuaciones de Lagrange es:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-2\lambda=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y+2\lambda=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial z}=2z-\lambda=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda}=-2x+2y-z+4=0$$

Si se sustituyen los valores de $2x, 2y$ y z de las tres primeras ecuaciones en la cuarta, se obtiene:

$$-2\lambda-2\lambda-\frac{\lambda}{2}+4=0,\qquad o\qquad -\frac{9}{2}\lambda+4=0,\quad o\quad \lambda=\frac{8}{9}$$

Por lo tanto, $x=\frac{8}{9},\quad y=-\frac{8}{9}\quad$ y $\quad z=\frac{4}{9}$ *es decir*, $P(\frac{8}{9},-\frac{8}{9},\frac{4}{9})$ *es el punto requerido*, y la distancia de dicho punto al origen es $\boxed{d=\frac{4}{3}}$

15 PUNTOS

2.

$$\nabla^2\phi=0$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=3ax^2y+by^3+2bxz\quad\longrightarrow\quad\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=6axy+2bz$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=ax^3+3bxy^2\quad\longrightarrow\quad\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=6bxy$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=z^2+bx^2\quad\longrightarrow\quad\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=2z$$

$$6axy+2bz+6bxy+2z=0$$
$$6xy(a+b)+2z(b+1)=0$$
$$a+b=0\qquad\qquad b+1=0$$
$$a=-b\qquad\qquad b=-1$$
$$a=1$$

$$\therefore\quad\boxed{\begin{array}{l}a=1\\ b=-1\end{array}}$$

15 PUNTOS

3.

a) Demostrar que $\tau=0 \quad \rightarrow \quad \tau=\dfrac{\overline{r}\,' x \overline{r}\,'' \bullet \overline{r}\,'''}{\left|\overline{r}\,' x \overline{r}\,''\right|}$

$\overline{r}\,'(t)=-2\hat{i}+(2t-4)\,j+2k$

$\overline{r}\,''(t)=2\,j$

$\overline{r}\,'''(t)=0\hat{i}+0\,j+0k$

$$\left|\overline{r}\,' x \overline{r}\,''\right|=\begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ -2 & 2t-4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow -2\begin{vmatrix} \hat{i} & k \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=-2\left|2\hat{i}+2k\right|=\boxed{-4\hat{i}-4k}$$

$\left|\overline{r}\,' x \overline{r}\,''\right|=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=\sqrt{2^5}=4\sqrt{2}$

$\overline{r}\,' x \overline{r}\,'' \bullet \overline{r}\,'''=0 \quad \rightarrow \quad \tau=\dfrac{0}{4\sqrt{2}}=0$

La curva si está en un plano

$b)$ *Evaluamos en* $t=2$ *para* $k=\dfrac{\left|r\,'(t)\,x\,r\,''(t)\right|}{\left|r\,'(t)\right|^3}$

$\left|\overline{r}\,' x \overline{r}\,''\right|=4\sqrt{2}$

$\overline{r}\,'(t)=-2\hat{i}+(2t-4)\widehat{j+2k}$

$\overline{r}\,'(2)=-2\hat{i}+0\widehat{j+2k} \quad \rightarrow \quad \left|\overline{r}\,'(2)\right|=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$

$$k=\frac{4\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^3}=\frac{4\sqrt{2}}{(8)(2^{3/2})}=\frac{4\sqrt{2}}{16\sqrt{2}}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

$$\boxed{k=\frac{1}{4}}$$

$c)$ *Del inciso* $a)$ *se tiene que* $\tau=0$ *por lo tanto*

$$\sigma=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{0} \quad \Rightarrow \quad \sigma\rightarrow\infty$$

$$\boxed{\therefore \;\; En\ cualquier\ instante \;\; \sigma\rightarrow\infty}$$

20 PUNTOS

4.

$$\int_0^{\pi/2} 8\sqrt{sen^2\theta-1}\ sen\ \theta\cos\theta\ d\theta+\int_0^{\pi/2} 2\sqrt{4\cos^2\theta-4}\ sen\ \theta\, 2\,\mathrm{sen}\,\theta\ d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2}[8\cos\theta sen\ \theta\cos\theta+2(2sen\ \theta)\,2\,\mathrm{sen}^2\theta]\ d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} 8\,sen\ \theta(\cos^2\theta+sen^2\theta)\,\mathrm{d}\,\theta=\int_0^{\pi/2} 8\,sen\ \theta\, d\theta$$

$$=-8\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}=-8(0-1)=\boxed{8}$$

15 PUNTOS

5

$$\oint_C \overline{F}\bullet d\,\overline{r}=\iint_S(\nabla x\overline{F})\bullet n\,dS$$

$$\nabla xF=\begin{vmatrix}\hat{i} & j & k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & 2z & 3y\end{vmatrix}=[3-2]\hat{i}+[-x]k=\hat{i}-xk$$

$Sea\ \ z=5-x:$

$$n=\frac{1\hat{i}+0\,j+1k}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}+k)$$

$$dS=\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+1}\ \ dxdy=\sqrt{(-1)^2+(0)^2+1}=\sqrt{2}\ dxdy$$

$Entonces$

$$\oint_C \overline{F}\bullet d\,\overline{r}=\iint_S(1,0,-x)\bullet\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\sqrt{2}\,dxdy=\iint_{Sxy}(1-x)dxdy$$

$$\iint_{Sxy}(1-\rho\cos\theta)\rho\,d\rho d\theta=\iint_{Sxy}(\rho-\rho^2\cos\theta)\,d\rho d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{3}(\rho-\rho^2\cos\theta)\,d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}\cos\theta]_0^3\ d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}[\frac{9}{2}-9\cos\theta]\ d\theta=[\frac{9}{2}\theta-9sen\theta]_0^{2\pi}=9\pi$$

$$\boxed{\oint_C \overline{F}\bullet d\,\overline{r}=9\pi}$$

20 PUNTOS

6

$$\phi = flujo = \oiint_S \overline{F} \bullet \overline{n}\ ds = \iiint_D (\overline{\nabla} \bullet \overline{F})\, dV$$

D *es el cuerpo volumetrico que encierra la superficie*

$$\overline{\nabla} \bullet \overline{F} = 6x - 6x + 2z = 2z$$

$$\phi = \iiint_D (2z)\, dV; \quad En\ esfericas \quad z = r\cos\phi$$

$$\phi = 2\int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (r\cos\phi) r^2 sen\phi\ d\theta d\phi dr = 2\int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^3 \cos\phi\, sen\phi\ d\theta d\phi dr$$

$$\phi = 4\pi \int_0^1 \int_0^{\pi} r^3 sen\phi \cos\phi\ d\phi\, dr = 4\pi \int_0^1 r^3 \left.\frac{sen^2\phi}{2}\right|_0^{\pi} dr = 0$$

$$\boxed{El \quad flujo\ neto\ es\ \phi = 0 \quad unidades\ de \quad flujo}$$

15 PUNTOS