



Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ingeniería  
División de Ciencias Básicas  
Coordinación de Matemáticas  
Cálculo Vectorial  
Primer Examen Final Colegiado  
Tipo A



Semestre: 2016-2

Duración máxima: 2 horas

Nombre: \_\_\_\_\_

No. de cuenta: \_\_\_\_\_

1. Mediante multiplicadores de Lagrange dimensionar una lata cilíndrica con tapa que debe contener 1 litro de agua, tal que la cantidad de lámina requerida para su elaboración sea mínima.

20 PUNTOS

2. Sea la transformación

$$T : \begin{cases} u = ax + 2y + 2z \\ v = -2x - y + bz \\ w = -2x + cy - z \end{cases}$$

- a) Calcular los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ , tal que la transformación sea ortogonal.
- b) Empleando la transformación  $T$ , obtener el vector gradiente  $\nabla F$  de la función  $F(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2$

15 PUNTOS

3. Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas expresado por

$$\vec{F}(x, y, z) = yi + (x + e^{2z})j + (1 + 2ye^{2z})k$$

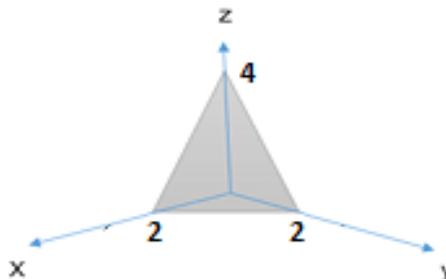
sobre una partícula que se desplaza desde el punto  $A(-1, 1, 0)$  hasta el punto  $B(1, 1, 0)$  a lo largo del segmento de recta que los une.

20 PUNTOS

4. La posición medida en metros de una partícula con respecto al tiempo está determinada por la función vectorial  $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ , donde  $t$  está medido en segundos. La partícula comienza a moverse en  $t = 0$  segundos.
- Calcular la distancia recorrida  $\frac{\pi}{2}$  segundos después de que empezó a moverse.
  - Obtener las coordenadas de la posición de la partícula después de que recorrió  $2\pi$  metros, medidos desde que comenzó a moverse.
  - Determinar la aceleración normal en  $t = \frac{\pi}{2}$ .

15 PUNTOS

5. Calcular el área de la porción del plano que se muestra en la figura empleando una integral doble.



15 PUNTOS

6. Calcular el flujo neto del campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (yz)\mathbf{i} + (xz)\mathbf{j} + (3z^2)\mathbf{k}$$

a través de la región  $D$  en el primer octante limitada por los planos coordenados y por las superficies  $x^2 + y^2 = 4$  y  $z = 2$

15 PUNTOS



1. Sea la figura

$$f(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad \text{función objetivo}$$

$$g(r, h) = \pi r^2 h = 1000 \text{ cm}^3 \quad \text{función restricción}$$

$$\text{entonces } l(r, h, \lambda) = 2\pi r^2 + 2\pi rh + \lambda(\pi r^2 h - 1000)$$

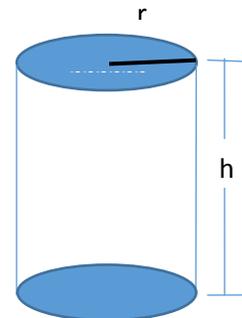
$$l_r(r, h, \lambda) = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi\lambda hr = 0$$

$$l_h(r, h, \lambda) = 2\pi r + \lambda\pi r^2 = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} 2r + h + \lambda rh = 0 \\ (2 + \lambda r)r = 0 \\ \pi r^2 h - 1000 = 0 \end{cases}$$

$$l_\lambda(r, h, \lambda) = \pi r^2 h - 1000 = 0$$

$$r = -\frac{2}{\lambda}, \quad h = -\frac{4}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \pi\left(\frac{4}{\lambda^2}\right)\left(-\frac{4}{\lambda}\right) = 1000 \quad \text{de donde } \frac{1}{\lambda^3} = \frac{1000}{-16\pi}$$

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{5}{\sqrt[3]{2\pi}} \quad \therefore r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}} \quad \text{y} \quad h = \frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}}$$



2. Sean

$$\begin{array}{lll} a) & \nabla u = (a, 2, 2) & \nabla u \cdot \nabla v = -2a - 2 + 2b = 0 \quad a = 1 \\ & \nabla v = (-2, -1, b) \quad \rightarrow & \nabla u \cdot \nabla w = -2a + 2c - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad b = 2 \\ & \nabla w = (-2, c, -1) & \nabla v \cdot \nabla w = 4 - c - b = 0 \quad c = 2 \end{array}$$

$$b) \quad |\nabla u| = (1, 2, 2) = 3$$

$$|\nabla v| = (-2, -1, 2) = 3 \quad \rightarrow \quad h_u = h_v = h_w = \frac{1}{3}$$

$$|\nabla w| = (-2, 2, -1) = 3$$

$$c) \quad \nabla F(u, v, w) = 3 \frac{\partial F}{\partial u} e_u + 3 \frac{\partial F}{\partial v} e_v + 3 \frac{\partial F}{\partial w} e_w = 6u e_u + 6v e_v + 6w e_w$$

3. Si  $\nabla_x F = 0$   $F$  es conservativo  $\rightarrow F = \nabla \phi$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + e^{2z}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 1 + 2ye^{2z}$$

$$\phi(x, y, z) = xy + c_1(y, z) \quad \phi(x, y, z) = xy + ye^{2z} + c_2(x, z) \quad \phi(x, y, z) = z + ye^{2z}$$

$$\phi(x, y, z) = \frac{x^2}{2}y + ye^{2z} + z + k \rightarrow w = \phi(1, 1, 0) - \phi(-1, 1, 0) = (2+k) - k$$

$\therefore w = 2$  unidades de trabajo

4. a) Si  $\bar{u}(t) = (-2\text{sen}t, 2\text{cos}t)$

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 dt = \pi \text{ m}$$

$$b) \int_0^t 2 dt = 2\pi \rightarrow 2t = 2\pi \rightarrow t = \pi \text{ s} \quad \therefore \bar{r}(\pi) = (-2, 0)$$

c)  $\bar{a}(t) = (-2\text{cos}t, -2\text{sen}t)$

$$\bar{u}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-2, 0) \quad \bar{a}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, -1) \rightarrow \bar{u} \cdot \bar{a} = 0$$

$$\bar{a}_t = \bar{0} \rightarrow \bar{a}_N = (0, -2) \text{ m/s}$$

5.

$$A(s) = \iint_s ds \quad \text{donde } z = 4 - 2x - 2y$$

$$A(s) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dA = \iint_{R_{xy}} \sqrt{4 + 4 + 1} dA$$

$$A(s) = 3 \iint_{R_{xy}} dA, \quad A(s) = 3A(R_{xy}) \quad \therefore A(s) = 6u^2$$

6.

Sea la figura

$$\nabla \cdot \vec{F} = 6z$$

$$\Phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^2 6zr \, dz \, dr \, d\theta$$

$$\Phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 12r \, dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 24 \, d\theta = 12\pi \text{ unidades de flujo}$$

