Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas
Cálculo Vectorial
Solución Primer Examen Final Tipo C

Semestre: 2018-2

1. Determinar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede ser inscrita en la región limitada por el plano XY y por la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$

Funcion objetivo

$$v = (2x)(2y)z = 4xyz$$

Ecuación de condición

$$g = 4 - x^2 - y^2 - z = 0$$

Función de Lagrange

$$F = 4xyz + \lambda\left(4 - x^2 - y^2\right)$$

$$F_x = 4xyz + \lambda(-2x) = 0 \Rightarrow -\lambda = \frac{-2yz}{x}$$

$$F_y = 4xyz + \lambda(-2y) = 0 \Rightarrow -\lambda = \frac{-2xz}{y}$$

$$F_x = 4xyz + \lambda(-1) = 0 \Rightarrow -\lambda = -4xy$$

$$\frac{-2yz}{x} = \frac{-2xz}{y} = -4xy$$

$$\frac{-2yz}{x} = \frac{-2xz}{y} \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2$$

$$\frac{-2xz}{y} = -4xy \quad \Rightarrow \quad z = 2y^2$$

Sustituimos en la ecuación de condición

$$4 - y^2 - y^2 - 2y^2 = 0$$

$$4 - 4y^2 = 0$$

$$y^2 = 1 \qquad \begin{cases} y_1 = -1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 = 1 \qquad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Las dimensiones son:

$$2x = 2$$

$$2y = 2$$

$$z = 2$$

2. Sea C **la curva que representa la trayectoria de un avión**

$$C: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

a) obtener la distancia que recorre el avión desde el punto $A(-3,\ 4,\ 4)$ **hasta el punto** $B(-7, 6,\ 8\ )$**.**

b) determinar las coordenadas del punto D **que es la posición del avión después de haber recorrido 15 unidades de longitud a partir del punto** $A(-3,4,4)$**.**

Solución:

Ec. Vectorial:

$$\bar{r}(t) = (1-2t)i + (2+t)\,j + 2tk \ \leftarrow vector\ de\ posición$$

$$\bar{r}\,'(t) = -2i + j + 2k \leftarrow vector\ de\ velocidad\ (vector\ tangente)$$

$$2 \le t \le 4$$

$$\bar{r}(2) = (-3,4,4) \leftarrow vector\ de\ posición\ del\ punto\ A$$

$$\bar{r}(4) = (-7,6,8) \leftarrow vector\ de\ posición\ del\ punto\ B$$

$$Rapidez: \left|\bar{r}\,'(t)\right| = 3$$

$$Longitud\ de\ arco:$$

$$S = \int_2^4 \left|\bar{r}\,'(t)\right| dt = 3\left[t\right]_2^4 = 6\ \ unidades\ de\ longitud$$

$$S = \int_2^t 3dt = 3\left[t\right]_0^t = 15$$

$$3(t-2) = 15$$

$$t = 7$$

$$vector\ de\ posición:\ \bar{r}(7) = (-13,9,14)$$

$$posición\ del\ avión:\ C(-13,9,14)$$

3. Sean las ecuaciones de transformación

$$u = x + 2y + 2z$$
$$v = -4x + y + z$$
$$w = z - y$$

Determinar:

a) si el sistema es ortogonal.

b) los vectores base e_u , e_v y e_w **.**

c) los factores de escala h_u , h_v y h_w **.**

d) el gradiente en coordenadas curvilíneas de la función

$$\phi\,(u,v,w) = u + \sqrt{2}\,(v+w)$$

Solución:

$$\begin{array}{c} \textit{Matriz Jacobiana} \\ \text{de transformación} \\ \textit{inversa} \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J\left(\frac{u,v,w}{x,y,z}\right) = 18 \qquad y \qquad J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) = 18$$

$$J\left(\frac{u,v,w}{x,y,z}\right) > 0 \ \ \textit{el sistema es derecho}$$

$$\textit{El sistema es ortogonal}:$$
$$\overline{\nabla_u} \cdot \overline{\nabla}_v = (1,2,2)\cdot(0,-1,1) = 0$$
$$\overline{\nabla_u} \cdot \overline{\nabla}_w = (1,2,2)\cdot(0,-1,1) = 0$$
$$\overline{\nabla_v} \cdot \overline{\nabla}_w = (-4,1,1)\cdot(0,-1,1) = 0$$

$$\textit{Los vectores base unitarios cumplen}$$
$$\overline{E}_u = \bar{e}_u \ \ , \ \ \overline{E}_v = \bar{e}_v \ \ , \ \ \overline{E}_w = \bar{e}_w \quad (\textit{sistema ortognal})$$

$$\overline{E}_u = \bar{e}_u = \frac{\overline{\nabla}_u}{\left|\overline{\nabla}_u\right|} = \frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{2}{3}k$$

$$\overline{E}_v = \bar{e}_v = \frac{\overline{\nabla}_v}{\left|\overline{\nabla}_v\right|} = -\frac{4}{3\sqrt{2}}i + \frac{1}{3\sqrt{2}}j + \frac{1}{3\sqrt{2}}k$$

$$\overline{E}_w = \bar{e}_w = \frac{\overline{\nabla}_w}{\left|\overline{\nabla}_w\right|} = 0i - \frac{1}{\sqrt{2}}j + \frac{1}{\sqrt{2}}k$$

Por ser un sistema ortogonal los factores de escala son recíprocos :

Factores de escala en base covariante :

$$H_u = \left|\overline{\nabla}_u\right| = 3 \; ; \; H_v = \left|\overline{\nabla}_v\right| = 3\sqrt{2} \; ; \; H_w = \left|\overline{\nabla}_w\right| = \sqrt{2}$$

Factores de escala en base contravariante

$$h_u = \frac{1}{H_u} = \frac{1}{3} \; ; \; h_v = \frac{1}{H_v} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \; ; \; h_w = \frac{1}{H_w} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Gradiente en coordenadas curvilíneas

$$\overline{\nabla}_\phi = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \phi}{\partial u}\bar{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial \phi}{\partial v}\bar{e}_u + \frac{1}{h_w}\frac{\partial \phi}{\partial w}\bar{e}_w$$

$$\overline{\nabla}_\phi = 3\bar{e}_u + 3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\right)\bar{e}_v + \sqrt{2}\left(\sqrt{2}\right)\bar{e}_w$$

$$\overline{\nabla}_\phi = 3\bar{e}_u + 6\bar{e}_v + 2\bar{e}_w$$

Otra forma de resolver es transformar $\phi(\mathrm{u,v,w})$ a coordenadas cartesianas :

$$\phi(\mathrm{u,v,w}) = u + \sqrt{2}\,(v+w) \xrightarrow{T:} \phi = (x,y,z) = \left(-4\sqrt{2}+1\right)x + 2y + \left(2\sqrt{2}+2\right)z$$

vector gradiente en coordenadas cartesianas :

$$\overline{\nabla}_\phi = \left(-4\sqrt{2}+1\right)i + 2j + \left(2\sqrt{2}+2\right)k$$

Transformar $\overline{\nabla}_\phi$ *de coordenadas cartesianas a coordenadas curvilíneas*

$$\left(-4\sqrt{2}+1\right)i + 2j + \left(2\sqrt{2}+2\right)k$$

$$\xrightarrow{T:}$$

$$\left(-4\sqrt{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}\bar{e}_u - \frac{4}{3\sqrt{2}}\bar{e}_v\right) + 2\left(\frac{2}{3}\bar{e}_u + \frac{1}{3\sqrt{2}}\bar{e}_v - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_w\right) + \left(2\sqrt{2}+2\right)\left(\frac{2}{3}\bar{e}_u + \frac{1}{3\sqrt{2}}\bar{e}_v + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_w\right)$$

$$\overline{\nabla}_\phi = 3\bar{e}_u + 6\bar{e}_v + 2\bar{e}_w$$

4. Calcular $\oint_c \overline{F} \bullet d\overline{r}$ **para la curva**

$$C:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

desde el punto $A(0,\,1,\,-1)$ **hasta el punto** $B(1,\,0,\,-1)$ **por el camino más corto y para**

$$\overline{F}(x,y,z)=(yz+1,\ xz+1,\ xy+1)$$

Solución:

$\overline{F}$ *está definido en una región simplemente conexa*

$$\nabla\times\overline{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz+1 & xz+1 & xy+1 \end{vmatrix}=i(x-x)-j(y-y)+k(z-z)=\overline{0}$$

$$\nabla\times\overline{F}=\overline{0}\quad,\quad \overline{F}\ es\ irrotacional\qquad \therefore\ \overline{F}\ es\ conservativo$$

$$\overline{F}=\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}i+\frac{\partial\phi}{\partial y}j+\frac{\partial\phi}{\partial z}k$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=yz+1\qquad \frac{\partial\phi}{\partial y}=xz+1\qquad \frac{\partial\phi}{\partial z}=xy+1$$

$$\phi(x,y,z)=\int\frac{\partial\phi}{\partial x}dx=\int(yz+1)dx=xyz+x+C(y,z)$$

$$\phi=xyz+x+C(y,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=xz+\frac{\partial}{\partial y}C(x,y)=x+1\ \rightarrow\ \frac{\partial}{\partial y}C(y,z)=1\ \rightarrow\ C(y,z)=y+C(z)$$

$$\phi=xyz+x+C(z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=xy+C'(z)=xy+1\ \rightarrow\ C'(z)=1\ \rightarrow\ C(z)=z+c$$

$$\phi=xyz+x+y+z+c$$

$$\overline{F}\ es\ conservativo:\ \int_c\overline{F}\cdot d\overline{r}=\phi=(x,y,z)\Big|_{A(0,1,-1)}^{B(1,0,-1)}$$

$$\int_c\overline{F}\cdot d\overline{r}=xyz+x+y+z+c\Big]_{A(0,1,-1)}^{B(1,0,-1)}=0+1+0-1+c-(0+1-1+c)$$

$$\int_c\overline{F}\cdot d\overline{r}=0$$

5. **Calcular el volumen que se encuentra limitado por las superficies de ecuaciones**

$$z = 0 \quad , \quad y + z = 16 \quad y \quad x^2 + y^2 = 4$$

Solución:

$$V = \iint_{Rxy} z(x,y)dxdy \quad , \quad z = 16 - y$$

$$R_{xy} = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

En coordenadas polares

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(16 - \rho sen\theta\right)\rho d\rho d\theta$$

$$= 32\pi \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^2 - \int_0^2 sen\theta \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^2 d\theta$$

$$= 64\pi + \frac{8}{3}\cos\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$V = 64\pi\left[L^3\right] \qquad\qquad L = longitud$$

6. **Empleando el Teorema de Green calcular**

$$\oint_c (y - x)dx + (2x - y)dy$$

donde C **es la frontera de la región delimitada por la gráfica de**

$y = x$ **y de** $y = x^2 - x$

$$\oint_C (y-x)dx+(2x-y)dy=\oint_{C1}(y-x)dx+(2x-y)dy+\oint_{C2}(y-x)dx+(2x-y)dy$$

1)

$$C1:\ y=x^2-x\ \Rightarrow\ dy=2xdx-dx=(2x-1)dx$$

$$\therefore \oint_{C1}(y-x)dx+(2x-y)dy=\int_0^2\left(8x^2-2x^3-5x\right)dx=\frac{64}{3}-\frac{16}{2}-10=\frac{10}{3}$$

2)

$$C2: y=x\ \Rightarrow dx=d$$

$$\therefore \oint_{C2}(y-x)dx+(2x-y)dy=\int_0^2 xdx=-\frac{4}{2}=-2$$

$$Además$$

$$\frac{\partial Q}{\partial X}-\frac{\partial P}{\partial Y}=1\ ;\ P=y-x\ ,\ Q=2x-y$$

$$\therefore \iint\left(\frac{\partial Q}{\partial X}-\frac{\partial P}{\partial Y}\right)dA=\int_0^2\int_{x^2+x}^{x}dydx=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$$

$$Dado\,que\oint_C(y-x)dx+(2x-yt)dy=\frac{10}{3}-2=\frac{4}{3}$$

$$\therefore cumple\,el\,Teorema\,de\,Green$$