3.

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas
Cálculo Vectorial
Primer Examen Extraordinario

Sinodales: M.E.M. Enrique Arenas Sánchez
M.A. Francisco José Castillo Cortés

Semestre: 2017-2 Duración máxima: 2 horas

Nombre: ______________________________________ No. de cuenta: _______________________

1. Sea la función $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$ determinar los puntos máximos, mínimos y puntos silla de la función y establecer su naturaleza.

15 PUNTOS

2. Sea la curva de ecuaciones $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 2y \end{cases}$ determinar el valor de su curvatura y su torsión en el punto $P\,(3, 4, 8)$.

15 PUNTOS

3. Sea el sistema curvilíneo cuyas ecuaciones de transformación son $\begin{cases} u = x^3 - 3xy^2 \\ v = 3x^2y - y^3 \end{cases}$

   Determinar:

   a) Si el sistema es ortogonal
   b) Los factores de escala del sistema h_u y h_v
   c) Los vectores unitarios e_u y e_v
   d) El Jacobiano de la transformación $J\left(\dfrac{u, v}{x, y}\right)$.
   e) Si la función $v(x, y)$ es armónica

25 PUNTOS

4. Utilizar el teorema de Green para calcular el área de la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y=0,\quad y=2x,\quad x^2+y^2=4$

15 PUNTOS

5. Utilizar integrales dobles para calcular el área de la región exterior a la curva de ecuación polar $\rho=2$ e interior a la curva $\rho=2(1+\cos\theta)$.

15 PUNTOS

6. Determinar el flujo total del campo $\overline{F}=(2x^2+3yz)i+(4xz^2+2z)j+(2xy+y^2)k$ que atraviesa una esfera de radio **5** con centro en el origen.

15 PUNTOS

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
Cálculo Vectorial
Solución Primer Examen Extraordinario
M.E.M. Enrique Arenas Sánchez
M.A. Francisco José Castillo Cortés

Semestre: 2017-2

1. $f(x, y) = (x-y)(1-xy) = x - x^2y - y + xy^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2xy + y^2 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 + 2xy - x^2 = 0$$

$$Sumando \quad y^2 - x^2 = 0$$
$$y = \pm x$$

$$Para \ \ y = x; \qquad 1 - 2x^2 + x^2 = 0$$
$$x^2 = 1 \ \longrightarrow \ x = 1 \qquad P_1(1,1)$$
$$x = -1 \quad P_1(-1,-1)$$

$$Para \ \ y = -x; \qquad 1 + 2x^2 + x^2 = 0$$
$$3x^2 = -1 \ \ no \ tiene \ sol.real$$

$$H \begin{vmatrix} -2x & -2x + 2y \\ 2y - 2x & 2y \end{vmatrix}$$

$$H|_{P1} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \ \Rightarrow \ Punto \ Silla \ en \ P_1(1,1)$$
$$H|_{P2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \ \Rightarrow \ Punto \ Silla \ en \ P_1(-1,-1)$$

15 PUNTOS

2.

$$C:\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ z=2y \end{cases} \qquad parametrizando\ \ C:\begin{cases} x=5\cos t \\ y=5sent \\ z=10sent \end{cases}$$

$$\bar{r}(t)=5(\cos t\, i+ sent\ j+2\,sen\,t\,k)$$

$$\bar{r}'(t)=5(-sent\,i+\cos t\ j+2\cos t\,k)$$

$$\bar{r}''(t)=5(-\cos t\,i-sent\ j-2\,sen\,t\,k)$$

$$en\ \ P(3,4,8)\ \ \ se\ tiene\ que\ \ \ \ \cos t=\frac{3}{5}$$

$$sent=\frac{4}{5}$$

$$r'(t)=5(-\frac{4}{5}i+\frac{3}{5}j+\frac{6}{5}k)=-4i+3j+6k$$

$$r''(t)=5(-\frac{3}{5}i-\frac{4}{5}j-2\frac{4}{5}k)=-3i-4j-8k$$

$$k=\frac{\left|\bar{r}'x\bar{r}''\right|}{\left|\bar{r}'\right|^3}$$

$$\bar{r}'x\bar{r}''=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 3 & 6 \\ -3 & -4 & -8 \end{vmatrix}=(24+24)i+(-18-32)j+(16+9)k$$

$$=-50j+25k=25(-2j+k)$$

$$\left|\bar{r}'x\bar{r}''\right|=25\sqrt{5}$$

$$\left|\bar{r}'\right|=\sqrt{16+9+36}=\sqrt{61}$$

$$k=\frac{25\sqrt{5}}{61\sqrt{61}}=0.1173$$

$$\tau=0\ \ \ \ \ la\ \ curva\ está\ contenida\ \ en\ el\ \ plano\ \ z=2y$$

15 PUNTOS

3.

$$u = x^3 - 3xy^2$$
$$v = 3x^2y - y^3$$
$$\overline{\nabla} u = (3x^2 - 3y^2)i + (-6xy)\,j \quad ; \qquad \left|\overline{\nabla} u\right| = \sqrt{9(x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \rightarrow \left|\overline{\nabla} u\right| = 3(x^2 + y^2)$$
$$\overline{\nabla} v = (6xy)i + (3x^2 - 3y^2)\,j \quad ; \qquad \left|\overline{\nabla} u\right| = 3(x^2 + y^2)$$

$$a)\ \ \overline{\nabla} u \bullet \overline{\nabla} v = 0 \qquad son\ ortogonales$$
$$b)\ h_u = \frac{1}{\left|\overline{\nabla}\right|} = \frac{1}{3(x^2 + y^2)}$$
$$c)\ \overline{e_u} = \frac{\overline{\nabla} u}{\left|\overline{\nabla} u\right|} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,i - \frac{2xy}{x^2 + y^2}\,j$$
$$\overline{e_v} = \frac{\overline{\nabla} v}{\left|\overline{\nabla} v\right|} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}\,i + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,j$$
$$d)\ \ J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \frac{1}{h_u h_v} = 9(x^2 + y^2)^2$$
$$e)\ \overline{\nabla}^2 v = \overline{\nabla} \bullet \overline{\nabla} v = 6y + (-6y) = 0 \quad es\ \ armonica$$

15 PUNTOS

4.

$$A = \frac{1}{2}\oint xdy - ydx$$

$$C_1 : \begin{cases} y = 0 \\ dy = 0 \end{cases} \qquad x : 0 \rightarrow 2$$
$$C_2 : \begin{cases} x = 2\cos t; \ \ dx = -2sent\ dt \\ y = 2sent; \ \ dy = 2\cos t\ dt \qquad t : 0 \rightarrow ang\tan 2 \end{cases}$$

$$\frac{y}{x} = 2 = \tan t_0 = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \rightarrow \quad \cos t_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad sent_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$C_3 : \begin{cases} y = 2x \\ dy = 2dx \end{cases} \quad ; \quad x : \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow 0$$

$$\int_{C_1} xdy - ydx = 0$$
$$\int_{C_2} xdy - ydx = \int_0^{t_0} 4\cos^2 t + 4sen^2 t\ \ dt = 4t \Big|_0^{t_0}$$
$$= 4ang\tan 2$$
$$\int_{C_3} xdy - ydx = \int_{\frac{2}{\sqrt{2}}}^{0} x(2dx) - 2xdx = 0$$
$$\therefore\ A = \frac{1}{2}(9 + 4ang\tan 2 + 0) = 2ang\tan 2$$

15 PUNTOS

5

$$A = 2\int_0^{\pi/2}\int_2^{2(1+\cos\theta)} p\,dp\,d\theta$$

$$A = 2\int_0^{\pi/2} \left.\frac{p^2}{2}\right|_2^{2+2\cos\theta} d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/2} (2+2\cos\theta)^2 - 2^2\,d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/2} 4+8\cos\theta+4\cos^2\theta-4\;d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/2} 8\cos\theta+2+2\cos 2\theta\,d\theta$$

$$A = 8\,sen\,\theta+2\theta+sen\,2\theta\Big|_0^{\pi/2}$$

$$A = (8+\pi)u^2$$

15 PUNTOS

6

$$\oint_S \overline{F}\bullet n\,ds = \iiint_R div\,\overline{F}\,dv;\;\; div\overline{F} = 4x$$

$$flujo = \iiint_R 4x\,dv = 4\int_0^5\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \rho^3\cos\theta sen^2\phi d\rho$$

$$R = \left\{(\rho,\varphi,\theta)\middle|0\le\rho\le 5\;;\;0\le\phi\le 2\pi\right\}$$

$$flujo = 4\int_0^5\int_0^{\pi} -\rho^3 sen\theta\,sen^2\phi\Big|_0^{2\pi}\;d\phi d\rho$$

$$= 4\int_0^5\int_0^{\pi} -\rho^3(0)sen^2\phi\;d\phi d\rho = 0$$

15 PUNTOS