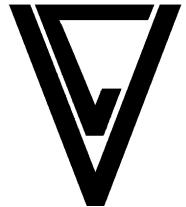




3.

**Universidad Nacional Autónoma de México**  
**Facultad de Ingeniería**  
**División de Ciencias Básicas**  
**Coordinación de Matemáticas**  
**Cálculo Vectorial**  
**Primer Examen Extraordinario**  
**Sinodales: M.E.M. Enrique Arenas Sánchez**  
**M.A. Francisco José Castillo Cortés**



Semestre: 2017-2

Duración máxima: 2 horas

Nombre: \_\_\_\_\_ No. de cuenta: \_\_\_\_\_

1. Sea la función  $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$  determinar los puntos máximos, mínimos y puntos silla de la función y establecer su naturaleza.

**15 PUNTOS**

2. Sea la curva de ecuaciones  $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 2y \end{cases}$  determinar el valor de su curvatura y su torsión en el punto  $P(3, 4, 8)$ .

**15 PUNTOS**

3. Sea el sistema curvilíneo cuyas ecuaciones de transformación son  $\begin{cases} u = x^3 - 3xy^2 \\ v = 3x^2y - y^3 \end{cases}$

Determinar:

- Si el sistema es ortogonal
- Los factores de escala del sistema  $h_u$  y  $h_v$
- Los vectores unitarios  $e_u$  y  $e_v$
- El Jacobiano de la transformación  $J\left(\frac{u, v}{x, y}\right)$ .
- Si la función  $v(x, y)$  es armónica

**25 PUNTOS**

4. Utilizar el teorema de Green para calcular el área de la región del primer cuadrante limitada por las curvas  $y = 0$ ,  $y = 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 4$

**15 PUNTOS**

5. Utilizar integrales dobles para calcular el área de la región exterior a la curva de ecuación polar  $\rho = 2$  e interior a la curva  $\rho = 2(1 + \cos \theta)$ .

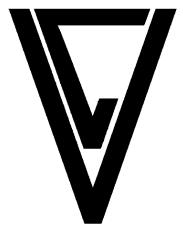
**15 PUNTOS**

6. Determinar el flujo total del campo  $\bar{F} = (2x^2 + 3yz)i + (4xz^2 + 2z)j + (2xy + y^2)k$  que atraviesa una esfera de radio 5 con centro en el origen.

**15 PUNTOS**



Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ingeniería  
Cálculo Vectorial  
Solución Primer Examen Extraordinario  
M.E.M. Enrique Arenas Sánchez  
M.A. Francisco José Castillo Cortés



Semestre: 2017-2

$$1. \quad f(x, y) = (x - y)(1 - xy) = x - x^2y - y + xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2xy + y^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 + 2xy - x^2 = 0$$

Sumando       $y^2 - x^2 = 0$   
                         $y = \pm x$

Para  $y = x$ ;       $1 - 2x^2 + x^2 = 0$   
                             $x^2 = 1 \rightarrow x = 1 \quad P_1(1, 1)$   
                             $x = -1 \quad P_1(-1, -1)$

Para  $y = -x$ ;       $1 + 2x^2 + x^2 = 0$   
                             $3x^2 = -1$  no tiene sol. real

$$H \begin{vmatrix} -2x & -2x + 2y \\ 2y - 2x & 2y \end{vmatrix}$$

$$H|_{P_1} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow \text{Punto Silla en } P_1(1, 1)$$

$$H|_{P_2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow \text{Punto Silla en } P_1(-1, -1)$$

2.

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 2y \end{cases} \quad \text{parametrizando } C: \begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 5 \sin t \\ z = 10 \sin t \end{cases}$$

$$\bar{r}(t) = 5(\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 2 \sin t \mathbf{k})$$

$$\bar{r}'(t) = 5(-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + 2 \cos t \mathbf{k})$$

$$\bar{r}''(t) = 5(-\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} - 2 \sin t \mathbf{k})$$

$$\text{en } P(3,4,8) \text{ se tiene que } \cos t = \frac{3}{5}$$

$$\sin t = \frac{4}{5}$$

$$\bar{r}'(t) = 5\left(-\frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j} + \frac{6}{5}\mathbf{k}\right) = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

$$\bar{r}''(t) = 5\left(-\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j} - 2\frac{4}{5}\mathbf{k}\right) = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$$

$$k = \frac{|\bar{r}' \times \bar{r}''|}{|\bar{r}'|^3}$$

$$\begin{aligned} \bar{r}' \times \bar{r}'' &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 3 & 6 \\ -3 & -4 & -8 \end{vmatrix} = (24+24)\mathbf{i} + (-18-32)\mathbf{j} + (16+9)\mathbf{k} \\ &= -50\mathbf{j} + 25\mathbf{k} = 25(-2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \end{aligned}$$

$$|\bar{r}' \times \bar{r}''| = 25\sqrt{5}$$

$$|\bar{r}'| = \sqrt{16+9+36} = \sqrt{61}$$

$$k = \frac{25\sqrt{5}}{61\sqrt{61}} = 0.1173$$

$\tau = 0$  la curva está contenida en el plano  $z = 2y$

**15 PUNTOS**

3.

$$u = x^3 - 3xy^2$$

$$v = 3x^2y - y^3$$

$$\bar{\nabla}u = (3x^2 - 3y^2)i + (-6xy)j \quad ; \quad |\bar{\nabla}u| = \sqrt{9(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)} \rightarrow |\bar{\nabla}u| = 3(x^2 + y^2)$$

$$\bar{\nabla}v = (6xy)i + (3x^2 - 3y^2)j \quad ; \quad |\bar{\nabla}v| = 3(x^2 + y^2)$$

a)  $\bar{\nabla}u \cdot \bar{\nabla}v = 0$  son ortogonales

b)  $h_u = \frac{1}{|\bar{\nabla}|} = \frac{1}{3(x^2 + y^2)}$

c)  $\bar{e}_u = \frac{\bar{\nabla}u}{|\bar{\nabla}u|} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}i - \frac{2xy}{x^2 + y^2}j$

$$\bar{e}_v = \frac{\bar{\nabla}v}{|\bar{\nabla}v|} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}i + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}j$$

d)  $J(\frac{u, v}{x, y}) = \frac{1}{h_u h_v} = 9(x^2 + y^2)^2$

e)  $\bar{\nabla}^2 v = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} v = 6y + (-6y) = 0$  es armonica

**15 PUNTOS**

4.

$$A = \frac{1}{2} \oint xdy - ydx$$

$$C_1 : \begin{cases} y = 0 \\ dy = 0 \end{cases} \quad x : 0 \rightarrow 2$$

$$C_2 : \begin{cases} x = 2 \cos t; \quad dx = -2 \sin t dt \\ y = 2 \sin t; \quad dy = 2 \cos t dt \end{cases} \quad t : 0 \rightarrow \text{ang tan } 2$$

$$\frac{y}{x} = 2 = \tan t_0 = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \rightarrow \cos t_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin t_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$C_3 : \begin{cases} y = 2x \\ dy = 2dx \end{cases} ; \quad x : \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow 0$$

$$\int_{C_1} xdy - ydx = 0$$

$$\int_{C_2} xdy - ydx = \int_0^{t_0} 4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t \ dt = 4t \Big|_0^{t_0} = 4 \text{ang tan } 2$$

$$\int_{C_3} xdy - ydx = \int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^0 x(2dx) - 2x dx = 0$$

$$\therefore A = \frac{1}{2}(0 + 4 \text{ang tan } 2 + 0) = 2 \text{ang tan } 2$$

**15 PUNTOS**

5

$$A = 2 \int_0^{\pi/2} \int_{-2}^{2(1+\cos\theta)} p \, dp \, d\theta$$

$$A = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{p^2}{2} \Big|_2^{2+2\cos\theta} \, d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/2} (2 + 2\cos\theta)^2 - 2^2 \, d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/2} 4 + 8\cos\theta + 4\cos^2\theta - 4 \, d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/2} 8\cos\theta + 2 + 2\cos 2\theta \, d\theta$$

$$A = 8\sin\theta + 2\theta + \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/2}$$

$$A = (8 + \pi)u^2$$

15 PUNTOS

6

$$\oint_S \overline{F} \cdot n \, ds = \iiint_R \operatorname{div} \overline{F} \, dv; \quad \operatorname{div} \overline{F} = 4x$$

$$\text{flujo} = \iiint_R 4x \, dv = 4 \int_0^5 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^3 \cos\theta \sin^2\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$R = \{(\rho, \varphi, \theta) | 0 \leq \rho \leq 5; 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

$$\text{flujo} = 4 \int_0^5 \int_0^\pi -\rho^3 \sin\theta \sin^2\phi \Big|_0^{2\pi} \, d\phi \, d\rho$$

$$= 4 \int_0^5 \int_0^\pi -\rho^3(0) \sin^2\phi \, d\phi \, d\rho = 0$$

15 PUNTOS