UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

CÁLCULO INTEGRAL
TERCER EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales: M.I. Mónica López Coyote
Ing. Sergio Carlos Crail Corzas

1221

14 de junio de 2018 ***Semestre 2018-2***

*Nombre:*____ *No. Cta.:*___________

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Aplicando el criterio del cociente o de D'Alembert determina el carácter de la siguiente serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{1-n} \cdot n}{(n+1)!}$$

15 puntos

---

2. Calcula el valor medio de la función $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo [0,2].

15 puntos

---

3. Efectúa:

$a)\ \displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 7}$ $\qquad b)\ \displaystyle\int ln\left(\sqrt{x}\right)dx$ $\qquad c)\ \displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

30 Puntos

4. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de las funciones.

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x$$

10 Puntos

---

5. Calcula la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección entre la gráfica de la función $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ y el plano $y=0$ en el punto $P\left(\sqrt{5},0\right)$.

15 Puntos

---

6. Representa gráficamente el dominio de la función y determina su recorrido.

$$g(x,y) = e^{-\sqrt{x-y+1}}$$

15 Puntos

1. Sea:

$$r=\frac{\dfrac{3^{1-(n+1)}(n+1)}{(n+2)!}}{\dfrac{3^{1-n}n}{(n+1)!}}=\frac{3^{1-n-1}(n+1)(n+1)!}{3^{1-n}(n)(n+2)!}$$

$$r=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} r=0=\rho \qquad como\ |\rho|<1\ se\ cumple$$

$$\therefore \boxed{La\ serie\ es\ convergente}$$

15 puntos

2. Sea:

$$f(c)=\frac{\displaystyle\int_0^2\left[3x^2-2x\right]dx}{2-0}=\frac{\left[x^3-x^2\right]_0^2}{2}$$

$$f(c)=\frac{8-4}{2}=\frac{4}{2}=\boxed{2}$$

15 Puntos

3. Solución

a) Por descomposición en fracciones parciales

Sea $$\frac{1}{x^2-8x+7}=\frac{1}{(x-1)(x-7)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-7}\ ;$$

$$1=A(x-7)+B(x-1)\Rightarrow\begin{cases} si\ \ x=1 \quad \Rightarrow \boxed{A=-\dfrac{1}{6}} \\ si\ \ x=7 \quad \Rightarrow \boxed{B=\dfrac{1}{6}} \end{cases}$$

entonces la integral queda:

$$I=\int\left[\frac{-1/6}{x-1}+\frac{1/6}{x-7}\right]dx$$

$$I=-\frac{1}{6}ln(x-1)+\frac{1}{6}ln(x-7)+C$$

$$\Rightarrow \boxed{I=ln\left(\sqrt[6]{\frac{x-7}{x-1}}\right)+C}$$

b) Por partes

$$I=\frac{1}{2}\int ln(x)\,dx$$

$$\left| \begin{array}{c} u=ln\,x \\ du=\dfrac{dx}{x} \end{array}\right. \Rightarrow \left| \begin{array}{c} dv=dx \\ v=x \end{array}\right.$$

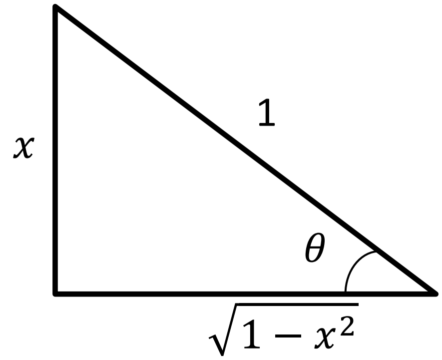
$$I=\frac{1}{2}\left[x\,ln(x)-\int dx\right]=\boxed{x\,ln\left(\sqrt{x}\right)-\frac{x}{2}+C}$$

c) Por sustitución trigonométrica

$$x = sen(\theta)$$

$$\sqrt{1-x^2} = cos(\theta)$$

$$dx = cos(\theta)\,d\theta$$



Al sustituir en la integral:

$$I = \int cos^2(\theta)\,d\theta; \quad cos^2(\theta) = \frac{1}{2}\left(1 + cos(2\theta)\right)$$

$$I = \frac{1}{2}\int \left(1 + cos(2\theta)\right)d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}sen(2\theta) + C$$

$$I = \boxed{\frac{1}{2}angsen(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}C}$$

30 Puntos

---

4. Sea la región:

Al hacerlas simultáneas

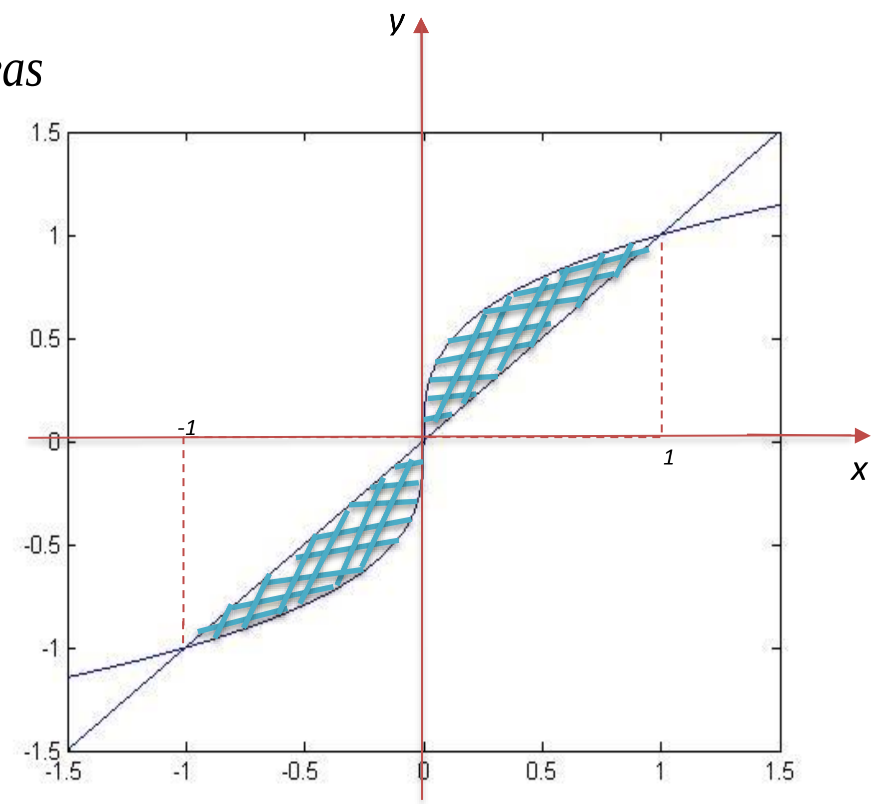
$$x^{1/3} - x = 0$$

$$x^{1/3}\left(1 - x^{2/3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0;$$

$$\Rightarrow x^{2/3} = 1;$$

$$x = -1;\; x = 1$$



$$A = 2\int_0^1 \left[x^{1/3} - x\right]dx$$

$$A = 2\left[\frac{x^{4/3}}{4/3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{3}{2}x^{4/3} - x^2\right]_0^1 = \frac{3}{2} - 1 = \boxed{\frac{1}{2}u^2}$$

10 Puntos

5.

Lo que se solicita es:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P} \; ; entonces \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

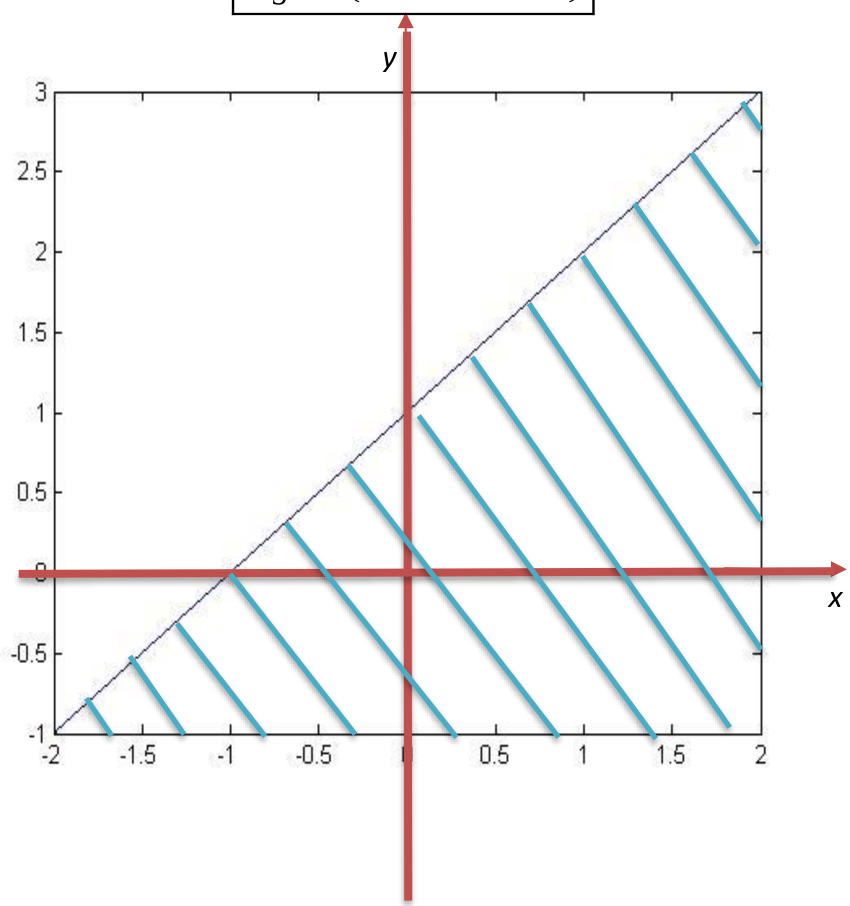
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(\sqrt{5},0\right)} = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9-5}} = \boxed{-\frac{\sqrt{5}}{2} = m_T}$$

15 Puntos

6.

Gráfica del dominio

$$\boxed{R_g = \left\{ z \mid z \in (0,1] \right\}}$$



15 Puntos