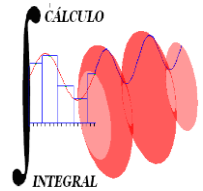




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS
CÁLCULO INTEGRAL
TERCER EXAMEN EXTRAORDINARIO



*Sinodales: M.I. Héctor Mora García
Ing. Sergio Carlos Crail Corzas*

14 de diciembre de 2017

1221

Semestre 2018-1

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es **2 horas**.

1. Obtén la serie de Maclaurin de la función.

$$f(x) = \ln \sqrt[3]{1+x}$$

20 Puntos

2. Calcula el valor de a tal que se verifique la siguiente igualdad.

$$\int_a^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1$$

10 Puntos

3. Efectúa las integrales:

$$a) \int \frac{4}{x^2 - x} dx \quad b) \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx \quad c) \int \ln \sqrt{1-x} dx$$

30 Puntos

4. Calcula la longitud de la gráfica de la función $g(x) = \frac{4}{3} \sqrt{x^3}$, en el intervalo $[0, 1]$.

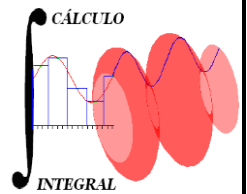
10 Puntos

5. Representa gráficamente el dominio de la función $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\ln(y-x)}}$ y determina su recorrido.

15 Puntos

6. Obtén la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $h(x, y) = \frac{x^2}{y^3}$ en el punto $P(4, 2)$.

15 Puntos



1.

Si se reescribe la función como $f(x) = \frac{1}{3} \ln(1+x)$

$$\Rightarrow f^n(x) = \frac{(n-1)!}{3} (-1)^n \frac{1}{(1+x)^n}$$

$\Rightarrow f^n(0) = \frac{(n-1)!}{3} (-1)^n$, al sustituir en la serie queda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{3} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} (x)^n = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n} x^n}$$

20 Puntos

2. Si

$$\int_a^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int_a^1 (1-x^2)^{-1/2} (-2x dx) = 1$$

$$\left[-\sqrt{1-x^2} \right]_a^1 = 1$$

$$-0 + \sqrt{1-a^2} = 1$$

$$1 - a^2 = 1$$

$$\therefore \boxed{a=0}$$

10 Puntos

3. Solución

a) Por descomposición en fracciones parciales

Sea la fracción $\frac{4}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$;

$$4 = A(x-1) + Bx \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x = 0 & \Rightarrow \boxed{A = -4} \\ \text{si } x = 1 & \Rightarrow \boxed{B = 4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int \left[-\frac{4}{x} + \frac{4}{x-1} \right] dx$$

$$I = -\ln(x^4) + \ln(x-1)^4 + C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)^4 + C}$$

b) Por sustitución trigonométrica

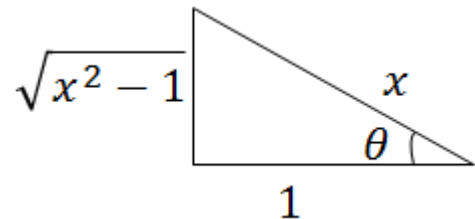
$$x = \sec \theta$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \tan \theta$$

$$dx = \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$I = \int \frac{\tan \theta}{\sec \theta} \sec \theta \tan \theta d\theta = \int \tan^2 \theta d\theta = \int (\sec^2 \theta - 1) d\theta$$

$$I = \tan \theta - \theta + C = \boxed{\sqrt{x^2 - 1} - \text{ang } \sec x + C}$$



c) Por partes

$$I = \frac{1}{2} \int \ln(1-x) dx$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \ln(1-x) \\ du = \frac{-1}{1-x} dx \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} dv = dx \\ v = x \end{array} \right.$$

$$I = \frac{1}{2} \left[x \ln(1-x) + \int \frac{x}{1-x} dx \right]$$

$$\boxed{I = x \ln \sqrt{1-x} - \frac{x}{2} - \ln \sqrt{1-x} + C}$$

30 Puntos

4.

Si

$$g'(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x} \Rightarrow [g'(x)]^2 = 2x$$

Al sustituir

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + [g'(x)]^2} dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + 2x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \frac{(1+2x)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{3} \sqrt{(1+2x)^3} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{27} - \frac{1}{3}$$

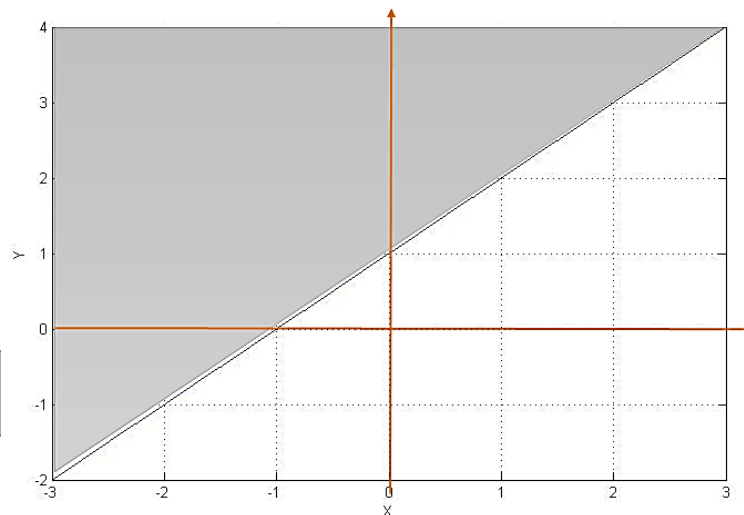
$$= \boxed{\frac{1}{3}(3\sqrt{3} + 1) u}$$

5.

Si el dominio es

$$D_f = \{(x, y) / \ln(y - x) > 0\}$$

$$R_f = \{z / z \in (0, \infty)\}$$



15 Puntos

6.

La ecuación del plano se obtiene con

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_p (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_p (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_p (z - z_0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{y^3} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_p = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^4} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_p = -1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -1 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_p = -1$$

$$x - 4 - (y - 2) - (z - 2) = 0$$

$$x - 4 - y + 2 - z + 2 = 0$$

$$x - y - z = 0$$

20 Puntos