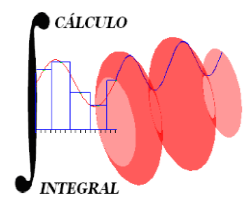




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL



1221

SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO

7 de diciembre de 2018

Semestre 2019-1

Nombre: _____ No. Cta.: _____

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

1. Obtén la serie de Maclaurin de la función:

$$f(x) = \frac{2}{1+x}$$

15 puntos

2. Calcula el valor medio de la función $f(x) = e^{2x}$ en el intervalo $[0, \ln 2]$.

15 puntos

3. Emplea alguno de los métodos de integración para efectuar:

a) $\int x \ln(x) dx$

b) $\int \frac{x-1}{x^3+x} dx$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

30 Puntos

4. Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar, alrededor del eje de las abscisas, la región limitada por la gráfica de:

$$y = \sqrt{x}, \quad y = 0 \quad y \quad x = 4$$

10 Puntos

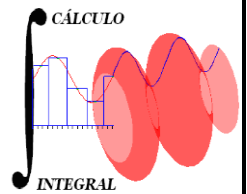
5. Obtén la ecuación que representa la familia de curvas de nivel de la función $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2 - 1}$, identifica qué tipo de curvas son y traza la gráfica de la función.

15 Puntos

6. Obtén la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función

$$g(x, y) = \sqrt{4 - y^2} \quad \text{en el punto } A(1, 1).$$

15 Puntos



1. Sea:

$$f'(x) = 2 \left[\frac{-1}{(1+x)^2} \right]$$

$$f''(x) = 2 \left[\frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3} \right]$$

⋮

$$f^n(x) = 2 \left[\frac{n!}{(1+x)^{n+1}} (-1)^n \right]$$

$$\Rightarrow f^n(0) = 2(n!)(-1)^n$$

Por lo que la serie es :

$$\frac{2}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^n$$

15 puntos

2. El valor medio es:

$$f(c) = \frac{\int_0^{\ln 2} [e^{2x}] dx}{\ln 2} = \frac{\left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\ln 2}}{\ln 2} = \frac{\frac{3}{2}}{\ln 2} = \boxed{\frac{3}{\ln 4}}$$

15 Puntos

3. Solución

a) Por partes

$$\left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} dv = x dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right.$$

$$I = x^2 \ln(\sqrt{x}) - \int \frac{1}{2} x dx$$

$$I = x^2 \ln(\sqrt{x}) - \frac{x^2}{4} + C$$

b) Por descomposición en fracciones parciales

$$\text{Sea } \frac{x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1};$$

$$x-1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x=0 \Rightarrow \boxed{A=-1} \\ \text{si } x=-1 \Rightarrow -2 = -2 + B + C \\ \boxed{B=C} \\ \text{si } x=1 \Rightarrow 0 = -2 + B + C \\ B + C = 2 \\ \boxed{C=1=B} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{-dx}{x} + \int \frac{x+1}{x^2+1} dx = -\ln(x) + \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$I = -\ln(x) + \ln(\sqrt{x^2+1}) + \text{ang tan}(x) + C$$

$$\Rightarrow I = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) + \text{ang tan}(x) + C$$

c) Por sustitución trigonométrica

$$x = \tan(\theta)$$

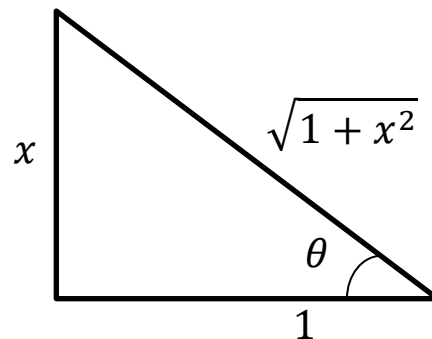
$$\sqrt{1+x^2} = \sec(\theta)$$

$$dx = \sec^2(\theta) d\theta$$

Al sustituir en la integral:

$$I = \int \frac{\sec^2(\theta) d\theta}{\sec(\theta)} = \int \sec(\theta) d\theta$$

$$I = \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) + C$$



30 Puntos

4. El volumen es:

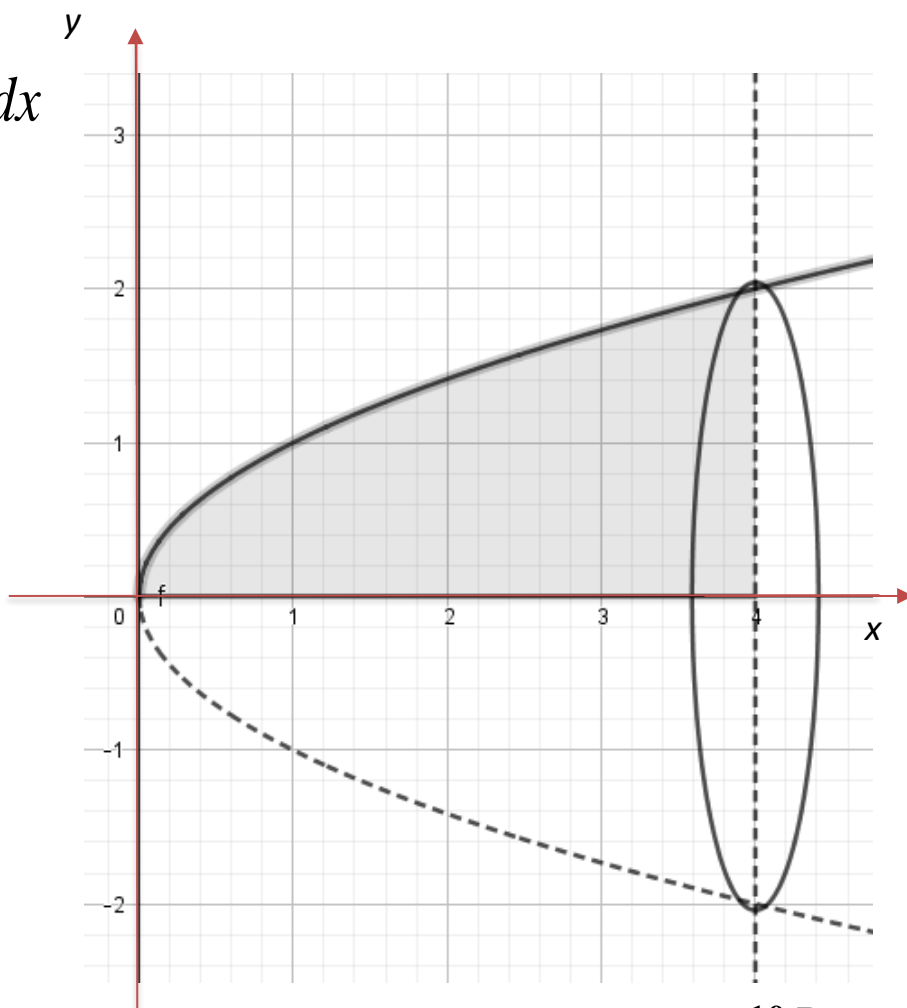
$$V = \pi \int_0^4 \left[\sqrt{x}\right]^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^4 x dx$$

$$V = \left[\frac{\pi}{2} x^2 \right]_0^4$$

$$V = \frac{\pi}{2} [16 - 0]$$

$$V = 8\pi$$



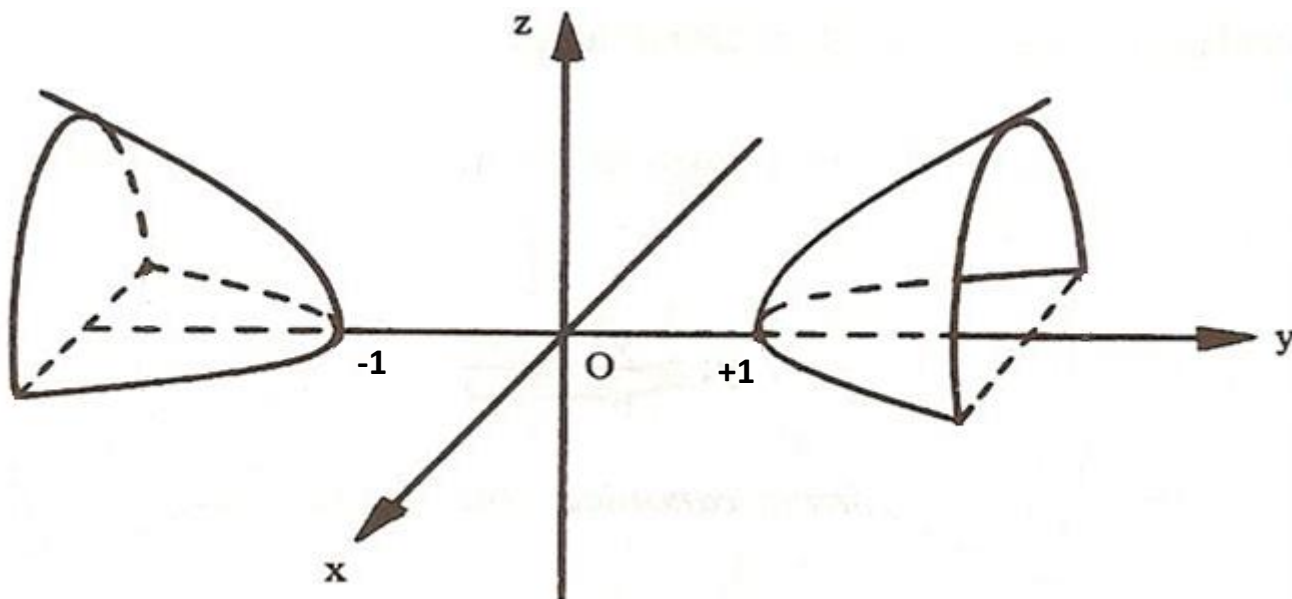
10 Puntos

5.

Si $z = k$ la ecuación se transforma en:

$$\frac{y^2}{k^2 + 1} - \frac{x^2}{k^2 + 1} = 1 \quad \text{familia de hipérbolas}$$

Gráfica de la función:



15 Puntos

6.

La ecuación tiene la forma:

$$\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_P (x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_P (y - y_0) + \frac{\partial g}{\partial z} \Big|_P (z - z_0) = 0$$

$$0(x - 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}(y - 1) - (z - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y + \sqrt{3}z - 4 = 0}$$

15 Puntos