UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL

SEGUNDO EXAMEN FINAL

TIPO "A"

9 de diciembre de 2015 ***Semestre 2016-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es **2 horas**.

---

1. Calcular el o los valores de $C \in [0,\ \pi]$ en donde se cumple el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para la función.

$$f(x) = -\ sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

15 Puntos

---

2. Calcular $D_x\, y\big|_{x=0}$ si

$$y = \log_2\left[\frac{e^{sen x}}{2}\right]$$

15 Puntos

---

3. Efectuar las integrales:

$$a)\ \int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \qquad\qquad b)\ \int \frac{2x^2}{\sqrt{1 - x^3}}\, dx$$

20 Puntos

4. Calcular el volumen del sólido que se forma al girar alrededor del eje de las ordenadas, la región limitada por las gráficas de:

$$y = \sqrt[3]{x} \quad , \qquad y = 1 \qquad \textbf{y} \qquad x = 0$$

10 Puntos

---

5. Sean $z = u^2 - v$ y $u = e^{2x+y}$, $v = sen\,(x+y)$,

calcular:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,-1)} \qquad y \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,-1)}$$

20 Puntos

---

6. Calcular la derivada direccional de la función $f(x, y) = 2x^2y^2 + 6xy$, en el punto P y en la dirección del punto P al punto Q, si las coordenadas de los puntos son $P(1, 1)$ y $Q(-1, -1)$.

20 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SOLUCIÓN DEL SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO

9 de diciembre de 2015 ***Semestre 2016-1***

1.

Sea

$$f(c) = \frac{-\int_0^{\pi} sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)dx}{\pi} = \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\Big]_0^{\pi}}{\pi}$$

$$f(c) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi} = \frac{0-0}{\pi} = 0$$

$$si \qquad f(c) = -\,sen\left(c - \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad -\,sen\left(c - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c = \frac{\pi}{2}}$$

15 Puntos

---

2. Al cambiar de base la función puede reescribirse

$$y = \frac{\ln e^{sen\,x}}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} sen\,x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\cos x}{\ln 2}$$

$$y'\Big|_{x=0} = \frac{1}{\ln 2}$$

15 Puntos

3. a) Se completa la diferencial

$$I=-\frac{2}{3}\int\left(1-x^3\right)^{-1/2}\left(-3x^2dx\right)=-\frac{2}{3}\frac{\left(1-x^3\right)^{-1/2}}{\frac{1}{2}}+c$$

$$\boxed{I=-\frac{4}{3}\sqrt{1-x^3}+c}$$

b) Por fracciones parciales

La factorización del denominador queda

$$\begin{aligned}x^3-2x^2-x+2&=x^2\left(x-2\right)-x+2\\&=x^2\left(x-2\right)-\left(x+2\right)\\&=\left(x-2\right)\left(x^2-1\right)\qquad \textit{entonces}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\left(x-2\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\qquad \textit{por lo que}$$

$$1=A\left(x-1\right)\left(x+1\right)+B\left(x-2\right)\left(x+1\right)+C\left(x-2\right)\left(x-1\right)$$

$$si\quad x=1\qquad si\quad x=-1\qquad si\quad x=2$$

$$B=-\frac{1}{2}\qquad C=\frac{1}{6}\qquad A=\frac{1}{3}$$

La integral queda

$$I=\int\left[\frac{1}{3\left(x-2\right)}-\frac{1}{2\left(x-1\right)}+\frac{1}{6\left(x+1\right)}\right]dx$$

$$\boxed{I=\ln\sqrt[3]{x-2}-\ln\sqrt{x-1}+\ln\sqrt[6]{x+1}+c}$$

30 Puntos

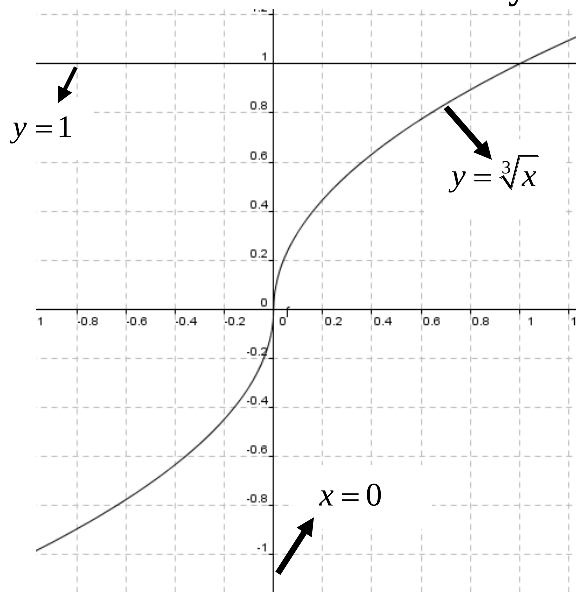
4. Sea la región

El volumen es

$$V = \pi \int_0^1 \left[g(y) \right]^2 dy$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(y^3 \right)^2 dy$$

$$V = \pi \int_0^1 y^6 \, dy = \pi \left(\frac{y^7}{7} \right) \Bigg]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{7} \, u^3}$$



10 Puntos

5.

Sea

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \bullet \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \bullet \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2u\left(e^{2x+y}\right)(2) + (-1)\left(\cos(x+y)\right)$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,-1)} = 4e \cdot e - 1 = \boxed{4e^2 - 1}$$

$$Sea \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \bullet \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \bullet \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 2u\left(e^{2x+y}\right)(2) + (-1)\left(\cos(x+y)\right)$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,-1)} = 2e \cdot e - 1 = \boxed{2e^2 - 1}$$

15 puntos

6.

Sea

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j = \left(4xy^2 + 6y\right) i + \left(4x^2 y + 6x\right) j$$

$$\Rightarrow \overline{\nabla} f \Big|_P = 10 i + 10 j$$

Sea el vector

$\overline{w} = (-2\,,-2)$ por lo que

$$\overline{u}_w = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\therefore \frac{df}{ds} = \overline{\nabla} f \cdot \overline{u}_w = (10,10) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{2(5)}{\sqrt{2}} - \frac{2(5)}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\frac{df}{ds} = -10\sqrt{2}}$$

15 Puntos