UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales: M.A. Francisco José Castillo Cortés
M.E.M. Margarita Ramírez Galindo

26 de octubre del 2019 *Semestre 2020-1*

*Nombre:*____*Número de cta.:*__________________

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **5 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Determinar el intervalo de convergencia de la serie sin incluir el análisis de los extremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{x}{2}\right)^{n}$$

20 puntos

---

2. Mediante el límite de las sumas de Riemann, calcular el valor de la integral

$$\int_{1}^{3} (x+1)\, dx$$

15 puntos

3. Efectuar:

$$a)\ \int x^2 e^{2x}\,dx \qquad b)\ \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} \qquad c)\ \int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}\,dx$$

30 puntos

---

4. Calcular el área de la región limitada por la gráfica de:

$$x = y^2, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad y = 1$$

20 puntos

---

5. En un circuito eléctrico simple la intensidad eléctrica está expresada por $I = \dfrac{V}{R}$, donde V es el voltaje y R es la resistencia. Calcular la rapidez con la que cambia la intensidad I, si se sabe que la resistencia R decrece con una rapidez de $2\,\dfrac{ohms}{minuto}$, mientras que el voltaje crece con una rapidez de $5\,\dfrac{volts}{minuto}$, en el instante en el que el voltage vale $80\,volts$ y la resistencia es de $10\,ohms$.

15 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

Solución del Segundo Examen Extraordinario

Semestre 2020 – 1

1.

$$a_{n+1}=3\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} \quad ; \quad a_n=3\left(\frac{x}{2}\right)^{n}$$

$$r=\frac{3\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{3\left(\frac{x}{2}\right)^{n}}=\frac{x}{2}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{2}=\frac{x}{2}$$

$$\left|\frac{x}{2}\right|<1 \quad => \quad x\in(-2,2)$$

20 puntos

2.

$$\Delta_x=\frac{3-1}{n}=\frac{2}{n}$$

$$x_0=a=1$$

$$x_1=1+\frac{2}{n}$$

$$x_2=1+2\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$x_3=1+3\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_i=1+i\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n=1+n\left(\frac{2}{n}\right)=3=b$$

$$f(\mathrm{x}_i)=\left[\left(1+\frac{2}{n}i\right)+1\right]=2+\frac{2}{n}i$$

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(2+\frac{2}{n}i\right)\frac{2}{n}$$

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}2+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right)$$

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(2n+\frac{2}{n}\frac{n(\mathrm{n}+1)}{2}\right)$$

$$I=4+2=6$$

15 puntos

3.

a) Por partes:

$$u = x^2 \quad ; \quad dv = e^{2x}dx$$

$$du = dx \quad ; \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$I = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}\int 2e^{2x}xdx$$

$$I = \frac{3}{2}x^2e^{2x} - \int e^{2x}xdx$$

Se tiene otra integral por partes muy semejante

$$I_1 = \int e^{2x}xdx$$

$$u_1 = x \quad ; \quad dv = e^{2x}dx$$

$$du_1 = dx \quad ; \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx$$

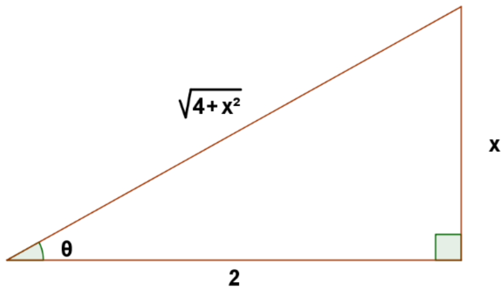
$$I_1 = \frac{1}{2}xe^{2x} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}e^{2x} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$\therefore I = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$$

Finalmente:

$$I = e^{2x}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + c$$

b) Por sustitución trigonométrica:



Del triangulo

$$\tan\theta = \frac{x}{2} \quad ; \quad x = 2\tan\theta \quad ; \quad dx = 2\sec^2\theta d\theta \quad ; \quad \sqrt{4+x^2} = 2\sec\theta$$

Entonces la sustitución queda:

$$I = \int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{2\sec\theta} = \int \sec\theta d\theta = \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right|$$

$$I = \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + c$$

c) Por fracciones parciales:

$$\frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}$$

$$A = 3 \quad ; \quad B = -1 \quad ; \quad C = 2$$

$$I = 3\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+3} + 2\int \frac{dx}{x-1}$$

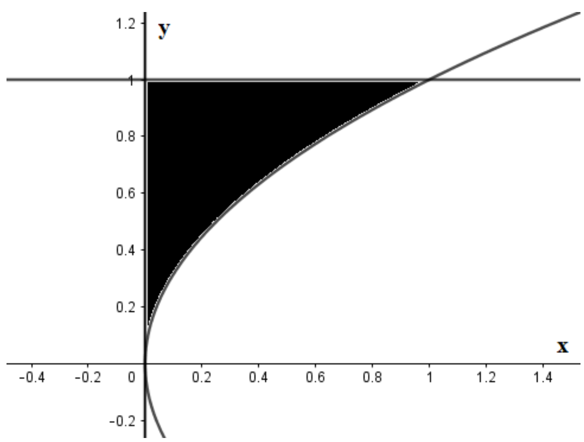
$$I = \ln\left|x^3\right| - \ln\left|x+3\right| + \ln\left|(\mathrm{x}-1)^2\right|$$

$$I = \ln\left|\frac{x^3(\mathrm{x}-1)^2}{x+3}\right| + c$$

30 puntos

4.

La gráfica es:



$$x = y^2 \quad => \quad y = \sqrt{x}$$

$$I = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad A = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \ \ u \ \ de \ \ á$$

20 puntos

5.

Resolución:

I es función de V y de R y, éstas a su vez son funciones del tiempo, mediante la regla de la cadena queda:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial V}\frac{dV}{dt} + \frac{\partial I}{\partial R}\frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dV}{dt} + \left(-\frac{V}{R^2}\right)\frac{dR}{dt}$$

Finalmente:

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{1}{10}\right)(5) + \left(-\frac{80}{100}\right)(-2) = \frac{5}{10} + \frac{16}{10} = \frac{21}{10}\left[\frac{A}{\min}\right]$$

15 puntos