UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales ***Ing. S. Carlos Crail Corzas***
Ing. Luis Hernández Moreno

24 de abril de 2019 ***1221*** ***Semestre 2019-2***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas.**

---

1. Obtener la serie de Taylor de la función f **alrededor de** $a=1$

$$f(x)=ln(x)^2$$

15 puntos

---

2. Calcular el valor medio de la función $f(\theta)=ctg^2\theta\, sen^3\theta$ **en el intervalo** $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

15 puntos

---

3. Efectuar

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x-6}$ b) $\displaystyle\int x\ ln\, x\, dx$ c) $\displaystyle\int \frac{ang\cos 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

30 puntos

4. Calcular el área de la región limitada por la gráfica de

$$y = \sqrt{-x} \quad \textbf{y de} \quad y = -x$$

Representar gráficamente la región.

10 puntos

---

5. Obtener $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right|_{(e\,,\,e)}$ **si** $f(x, y) = \log_x y$

15 puntos

---

6. Calcular el valor de la máxima variación de la función $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ **en el punto** $A(2, -2)$ **.**

15 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

1221

Solución del Segundo Examen Extraordinario

Semestre 2019 – 2

1. Sea:

$$f(x) = 2\,ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} = 2\left[\frac{1}{x}\right]$$

$$f''(x) = -\frac{1\cdot 2}{x^2} = 2\left[\frac{-1}{x^2}\right]$$

$$f'''(x) = 2\left[\frac{1\cdot 2}{x^3}\right]$$

$$\vdots$$

$$f^{n}(x) = 2\left[\frac{(n-1)!}{x^n}\right](-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow f^{n}(1) = 2(n-1)!(-1)^{n+1}$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n-1)!(-1)^{n+1}}{n!}(x-1)^n = \boxed{ln\left(x^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n}$$

15 puntos

2. El valor medio es:

$$f(c) = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left[\frac{cos^2\theta}{sen^2\theta}sen^3\theta\right]d\theta}{\pi/2} = \frac{\displaystyle -\int_0^{\pi/2}\left[cos^2\theta\right](-sen\theta d\theta)}{\pi/2}$$

$$f(c) = \frac{\left[-\frac{1}{3}cos^3\theta\right]_0^{\pi/2}}{\pi/2} = \frac{-0+\frac{1}{3}}{\pi/2} = \boxed{\frac{2}{3\pi}}$$

15 Puntos

3. Solución

a) Por descomposición en fracciones parciales

Sea $$\frac{1}{x^2-x-6}=\frac{1}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}\ ;$$

$$1=A(x-3)+B(x+2)\Rightarrow\begin{cases} si\ \ x=3 \ \Rightarrow 1=5B \\ \boxed{B=\frac{1}{5}} \\ si\ \ x=-2\Rightarrow 1=-5A \\ \boxed{A=-\frac{1}{5}}\end{cases}$$

$$I=\int\frac{-1/5}{x+2}dx+\int\frac{1/5}{x-3}dx=-ln\left(\sqrt[5]{x+2}\right)+ln\left(\sqrt[5]{x-3}\right)$$

$$\Rightarrow\boxed{I=ln\left(\sqrt[5]{\frac{x-3}{x+2}}\right)+C}$$

b) Por partes

$$\left|\begin{array}{l} u=ln\,x \\ du=\dfrac{dx}{x}\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} dv=xdx \\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right.$$

$$I=\frac{x^2}{2}ln(x)-\int\frac{1}{2}xdx$$

$$\boxed{I=x^2\,ln\left(\sqrt{x}\right)-\frac{x^2}{4}+C}$$

c) Inmediata

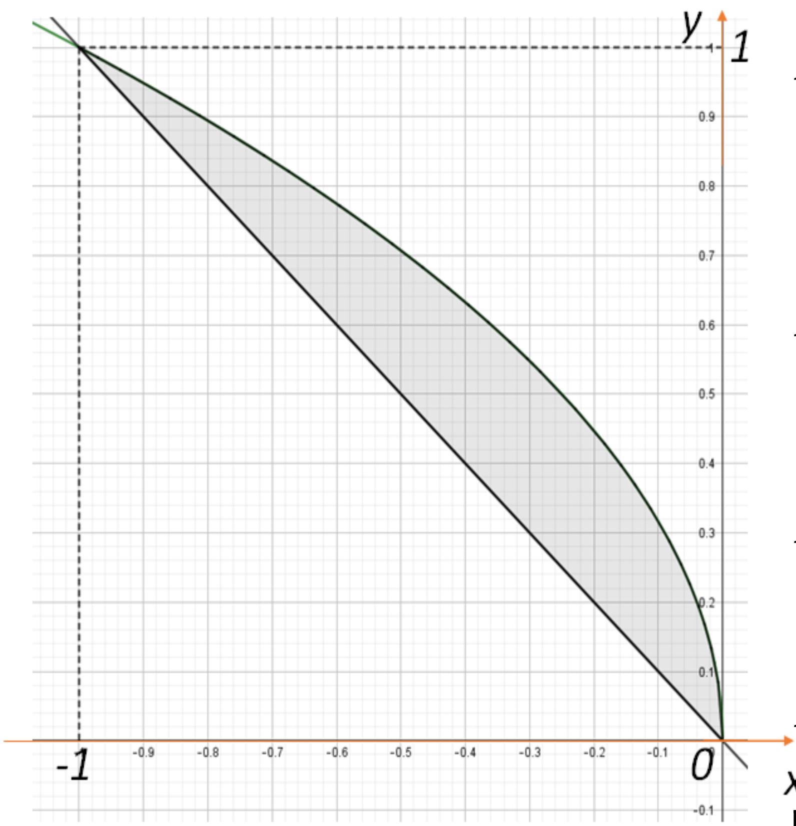
$$I=-\frac{1}{2}\int ang\cos 2x\left(\frac{-2dx}{\sqrt{1-4x^2}}\right)$$

$$I=-\frac{1}{2}\frac{\left(ang\cos 2x\right)^2}{2}+C$$

$$\boxed{I=-\frac{1}{4}\left(ang\cos 2x\right)^2++C}$$

30 Puntos

4. Sea la región:



$$A=\int_{-1}^{0}\left[\left(-x\right)^{1/2}-\left(-x\right)\right]dx$$

$$A=\left[-\frac{2}{3}\left(x\right)^{3/2}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$

$$A=0-\left[-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right]$$

$$A=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{A=\frac{1}{6}u^2}$$

10 Puntos

5.

$$Si \quad f(x,y)=\frac{ln\,y}{ln\,x}=ln\,y(ln\,x)^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}=(ln\,x)^{-1}\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\left(\frac{1}{y}\right)\left(-(ln\,x)^{-2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(e,e)}=\left(\frac{1}{e}\right)\left(-(ln\,e)^{-2}\right)\left(\frac{1}{e}\right)=\boxed{-\frac{1}{e^2}}$$

15 Puntos

6.

Sea:

$$\nabla f\big|_P=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}$$

$$\nabla f\big|_P=\left[\frac{2x}{y},-\frac{x^2}{y^2}\right]_{(2,-2)}$$

$$\nabla f\big|_P=\left[\frac{4}{-2},-\frac{4}{4}\right]=(-2,-1)$$

La máxima variación es:

$$|\nabla f|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

15 Puntos