UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL

SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales: M.I. Mayverena Jurado Pineda
Ing. S. Carlos Crail Corzas

23 de octubre de 2015 ***Semestre 2015-2***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Calcular el valor medio de la función $f(x)=(x-2)^3+3$ en el intervalo $[0,\ 4]$ y determinar el valor de c que se encuentra en el intervalo tal que se cumple el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

15 Puntos

---

2. Calcular, si existe:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x^2 \sec x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

15 Puntos

---

3. Efectuar las siguientes integrales:

$a)\ \displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2}$ $\qquad b)\ \displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$ $\qquad c)\ \displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx$

30 Puntos

4. Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de

$y^2 - 2 + x = 0$ y de $y^2 - x = 0$

10 Puntos

---

5. Sea la función $f\,(x,\; y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$, obtener su dominio y trazar su región de definición.

15 Puntos

---

6. Calcular la derivada direccional de la función $f\left(x,\, y,\, z\right) = x e^{yz} + x y e^{z}$ en el punto $Q(-2,\, 1,\, 1)$ y en la dirección del vector $\vec{v} = i - 2j + 3k$. Calcular la máxima variación de la función en el punto Q .

15 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SOLUCIÓN SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO

23 de abril de 2015 ***Semestre 2015-2***

1. El valor es

$$f(c)=\frac{\left.\frac{(x-2)^4}{4}+3x\right]_0^4}{4-0}=\frac{4+12-(4+0)}{4}=3$$

$$si\ \ f(c)=3\quad y\quad f(c)=(c-2)^3+3$$

$$\Rightarrow\qquad 3=(c-2)^3+3$$

$$\Rightarrow\qquad (c-2)^3=0\qquad\qquad \therefore\quad \boxed{c=2}$$

15 Puntos

2. Resolviendo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec(x)}{x^2\sec(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos(x)}}{\dfrac{x^2}{\cos(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos(x)-1}{\cancel{\cos(x)}}}{\dfrac{x^2}{\cancel{\cos(x)}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

15 Puntos

3. a) Por fracciones parciales:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

$$si \quad x = 0 \qquad\qquad si \quad x = -1 \qquad\qquad si \quad x = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 1} \qquad \Rightarrow \boxed{C = 1} \qquad \Rightarrow \boxed{A = -1}$$

$$I = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

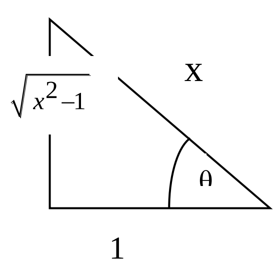
$$\boxed{I = -ln(x) - \frac{1}{x} + ln(x+1) + C}$$

b) Por sustitución trigonométrica:

$$si \qquad x = \sec\theta$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \tan\theta$$

$$dx = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$$



$$I = \int \frac{\tan\theta \cancel{\sec\theta} \tan\theta \, d\theta}{\cancel{\sec\theta}} = \int \tan^2\theta \, d\theta$$

$$I = \int (\sec^2\theta - 1) d\theta = \tan\theta - \theta + C$$

$$\boxed{I = \sqrt{x^2 - 1} - ang\sec x + C}$$

c) Por partes:

$$si \qquad w=\ln x$$
$$\Rightarrow e^{w}=x$$
$$\Rightarrow e^{w}\,dw=dx$$

$$\Rightarrow \int e^{w}\cos w\,dw$$

$$u=e^{w} \qquad dv=\cos w\,dw$$
$$du=e^{w}\,dw \qquad v=sen\,w$$

$$I=e^{w}\,senw-\int e^{w}senw\,dw$$

$$u_1=e^{w} \qquad dv_1=sen\,w\,dw$$
$$du_1=e^{w}\,dw \qquad v_1=-\cos w$$

$$I_1=-e^{w}\cos w+\int e^{w}\cos w\,dw$$
$$\Rightarrow \quad I=e^{w}\,sen\,w-\left[-e^{w}\cos w+I\right]$$
$$I=e^{w}\,sen\,w+e^{w}\cos w+I$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}e^{w}\,sen\,w+\frac{1}{2}e^{w}\cos w+C$$

$$si \;\; w=\ln x$$
$$\boxed{I=\frac{x}{2}\left[sen(\ln x)+\cos(\ln x)\right]+c}$$

30 Puntos

4. Al hacer simultáneas las ecuaciones

$$2-x=x \;\Rightarrow\; \boxed{x=1} \;\Rightarrow\; y_1=1 \;\; y \;\;\; y_2=-1$$

$$A=\int_{-1}^{1}\left(2-y^2-y^2\right)dy=2\int_{0}^{1}\left(2-2y^2\right)dy$$

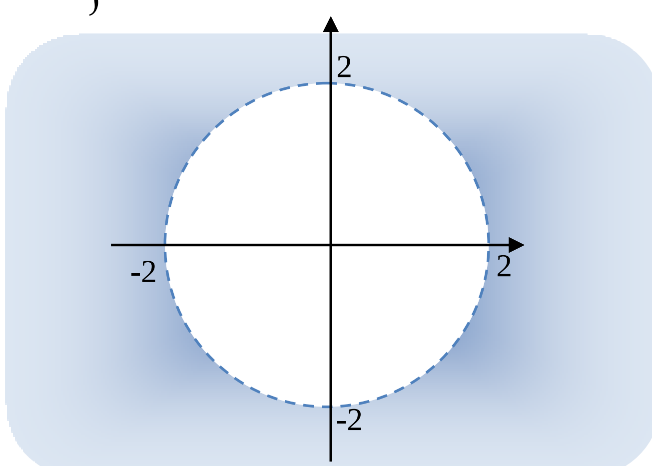
$$A=2\left[2y-\frac{2}{3}y^3\right]_0^1=2\left(2-\frac{2}{3}\right)=2\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\boxed{A=\frac{8}{3}u^2}$$

10 Puntos

5.

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2>4\right\}$$



15 Puntos

6. Sea

$a)$

$$D_{\bar{v}}\, f\left(x,y,z\right)=\overline{\nabla} f \bullet v$$

$$\overline{\nabla} f\left(x,y,z\right)=\left(e^{yz}+ye^{z}, xye^{yz}+xe^{z}, xze^{yz}+xye^{z}\right)$$

$$\overline{\nabla} f\left(-2,1,1\right)=\left(2e,-4e,-4e\right)$$

$$v=\frac{\bar{v}}{\left\|\bar{v}\right\|}=\frac{\left(1,-2,3\right)}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{\left(1,-2,3\right)}{\sqrt{14}}$$

$$D_{\bar{v}}\, f\left(-2,1,1\right)=\left(2e,-4e,-4e\right)\bullet\frac{\left(1,-2,3\right)}{\sqrt{14}}$$

$$D_{\bar{v}}\, f\left(-2,1,1\right)=\frac{2e+8e-12e}{\sqrt{14}}=\boxed{\frac{-2e}{\sqrt{14}}}$$

$b)$

$$\left|\overline{\nabla} f\right|=\sqrt{4e^{2}+16e^{2}+16e^{2}}=\sqrt{36e^{2}}=\boxed{6e}$$

15 Puntos