**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**
**FACULTAD DE INGENIERÍA**
**DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS**

**CÁLCULO INTEGRAL**
**PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO**

# TIPO " C "

*27 de mayo de 2019* — *Semestre 2019-2*

---

**INSTRUCCIONES:** Lee cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

**1. Mediante el criterio del cociente determina el carácter de la serie**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$$

**15 puntos**

---

**2. Obtén** $\left.\dfrac{dF}{dx}\right|_{x=e^2}$ **si** $F(x) = \displaystyle\int_1^x \ln w \, dw$

**10 puntos**

---

**3. Efectúa las integrales.**

$a) \displaystyle\int x\sqrt{x+1}\; dx \qquad b) \displaystyle\int sen^3 x \, dx \qquad c) \displaystyle\int \frac{x+1}{x\left(x^2+1\right)} dx$

**30 puntos**

**4. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de** $y = e$, $y = e^x$ y $x = 0$.

**Representa gráficamente la región.**

**15 puntos**

---

**5. Obtén la ecuación de las curvas de nivel de la función** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ , **para** $z = 1$ **y** $z = \sqrt{8}$ , **y representalas gráficamente.**

**15 puntos**

---

**6. Calcula la derivada direccional de la función** $f$ **en la dirección del vector** $\vec{v} = i - j$, **en el punto** $P(\pi, -\pi)$

$$f(x, y) = e^{sen(x + y)}$$

**15 puntos**

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
*CÁLCULO INTEGRAL*
**1221**
**Solución del Primer Examen Final**
**Tipo "C"**
**Semestre 2019 – 2**

**1.** Sea:

$$r=\frac{\dfrac{4^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{4^{n}}{(n)!}}=\frac{4^{n+1}}{4^{n}}\cdot\left(\frac{(n)!}{(n+1)!}\right)=\frac{4}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} r=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{n+1}\right]=0=\rho$$

$$como \quad |\rho|<1 \quad , \quad la \ \ serie \ \ es \ \ convergente$$

**15 Puntos**

**2.** Del Teorema fundamental del Cálculo:

$$F'(x)=ln\,x \quad \Rightarrow \quad F'\left(e^{2}\right)=ln\left(e^{2}\right)=\boxed{2}$$

**10 puntos**

**3.** Solución:

a) Por partes

$$\left| \begin{array}{l} u=x \\ du=dx \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} dv=(x+1)^{1/2}\,dx \\ v=\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2} \end{array} \right.$$

$$I=\frac{2}{3}x\sqrt{(x+1)^{3}}-\frac{2}{3}\int (x+1)^{3/2}\,dx=\boxed{\frac{2}{3}x\sqrt{(x+1)^{3}}-\frac{4}{15}x\sqrt{(x+1)^{5}}+C}$$

b) Por identidades trigonométricas:

$$sen^3 x = sen(x) - cos^2(x)sen(x)$$

$$I = \int sen(x)\,dx + \int cos^2(x)\left(-sen(x)dx\right)$$

$$\boxed{I = -cos(x) + \frac{cos^3(x)}{3} + C}$$

c) Por descomposición en fracciones parciales

Sea $\dfrac{x+1}{x\left(x^2+1\right)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ ;

$$x+1 = A\left(x^2+1\right) + x(Bx+C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} si \;\; x=0 \quad \Rightarrow \boxed{A=1} \\ si \;\; x=1 \quad \Rightarrow \boxed{B=-C} \\ si \;\; x=-1 \Rightarrow -2 = B-C \\ \qquad\qquad\quad \Rightarrow \boxed{C=1} \\ \qquad\qquad\quad \Rightarrow \boxed{B=-1} \end{cases}$$

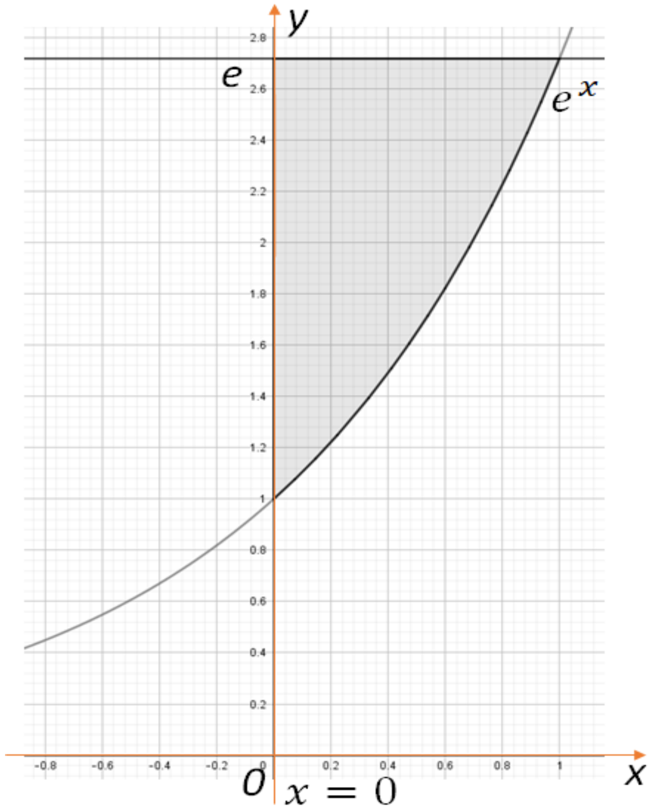
$$I = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+1}\right)dx = \int \frac{dx}{x} - \int\left(\frac{x}{x^2+1}\right)dx + \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$I = ln(x) - ln\sqrt{x^2+1} + ang\,tan(x) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + ang\,tan(x) + C}$$

**30 Puntos**

**4.** La región es:




$$A = \int_0^1 \left[e - e^x\right] dx$$

$$A = \left[ex - e^x\right]_0^1$$

$$A = e - e - (0 - 1)$$

$$\boxed{A = 1u^2}$$

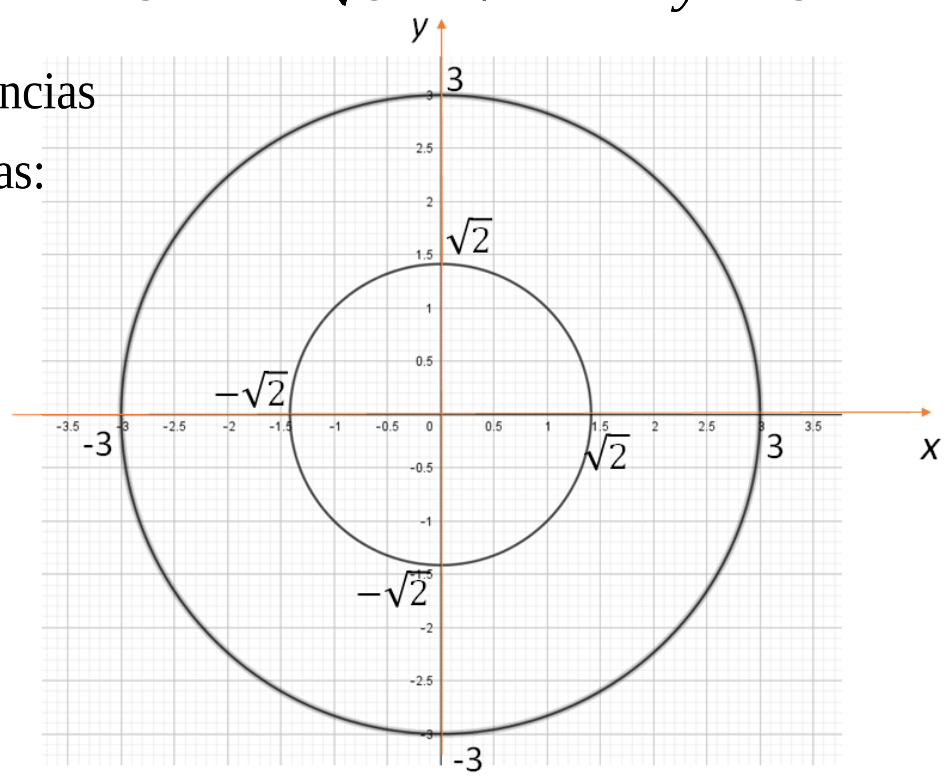
**15 Puntos**

**5.**

$$Si \quad z = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2$$

$$Si \quad z = \sqrt{8} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 9$$

Circunferencias concéntricas:




**15 Puntos**

**6.**

Sea:

$$\frac{df}{ds}=\nabla f\bullet\overline{u}$$

$$\nabla f\Big|_P=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_P\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_P\hat{j}$$

$$\nabla f\Big|_P=\left(e^{sen(x+y)}\cos(x+y),e^{sen(x+y)}\cos(x+y)\right)_P$$

$$\nabla f\Big|_P=(1,1)$$

$$\overline{u}_v=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{df}{ds}=(1,1)\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\boxed{0}$$

**15 Puntos**