UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL
1221
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO
TIPO "C"

30 de noviembre de 2018 — ***Semestre 2019-1***

*Nombre:*______________________________________ *No. Cta.:*____________

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Determina el carácter de la siguiente serie empleando el criterio de Leibniz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{7}}$$

15 puntos

---

2. Determina, si existe, el valor de:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 - sen\, x\right)^{\frac{1}{x}}$$

15 puntos

3. Efectúa:

$$a)\int sen\left(ln\,x\right)dx \qquad b)\int \frac{x-1}{x+x^{3}}dx \qquad c)\int \frac{dx}{x^{2}-4x+9}$$

30 Puntos

---

4. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de las funciones.

$$f\left(x\right)=x \qquad \text{y} \qquad g\left(x\right)=x^{2}-2$$

Haz la representación gráfica de la región.

10 Puntos

---

5. Determina el dominio, el recorrido y representa gráficamente el dominio de la función.

$$f\left(x,\,y\right)=\sqrt{\left(1-x\right)^{2}\left(1-y\right)}$$

15 Puntos

---

6. Para la función $f\left(x,\,y\right)=x\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$, calcula el valor de

$$\left.\frac{\partial^{2} f}{\partial x\,\partial y}\right|_{(\pi,\,1)}$$

15 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
CÁLCULO INTEGRAL
1221
Solución del Primer Examen Final
Tipo "C"
Semestre 2019 – 1

1. Debe cumplirse que:

$$|a_{n+1}| < |a_n|, \quad entonces$$

$$\frac{1}{\sqrt[n+2]{7}} < \frac{1}{\sqrt[n+1]{7}} \quad no\ se\ cumple$$

$$y\ que \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0\ ,\ por\ lo\ que$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{7}}\right) = 1$$

tampoco se cumple por lo tanto la serie diverge

15 Puntos

2. Si:

$$y = (1 - sen\,x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow ln(y) = \frac{ln(1 - sen\,x)}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left[ln(y)\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{ln(1 - sen\,x)}{x}\right] = \frac{0}{0}$$

aplicando L'Hôpital

$$\Rightarrow ln\left[\lim_{x\to 0^+}(y)\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{-\cos x}{1 - sen\,x}\right] = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0^+}(1 - sen\,x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}}$$

15 puntos

3. Solución

a) Cambio de variable y por partes

$$\omega = ln(x) \quad \Rightarrow e^{\omega} = x$$

$$e^{\omega}\, d\omega = dx$$

$$\Rightarrow I = \int e^{\omega}\, sen(\omega)\, d\omega \quad por\ partes$$

$$\left| \begin{aligned} u &= sen(\omega) \\ du &= cos(\omega)\, d\omega \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} dv &= e^{\omega}\, d\omega \\ v &= e^{\omega} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow I = e^{\omega}\, sen(\omega) - \int e^{\omega} cos(\omega)\, d\omega$$

$$de\ nuevo\ por\ partes$$

$$\left| \begin{aligned} u_1 &= cos(\omega) \\ du_1 &= -sen(\omega)\, d\omega \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} dv_1 &= e^{\omega}\, d\omega \\ v_1 &= e^{\omega} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow I_1 = e^{\omega} cos(\omega) + \int e^{\omega}\, sen(\omega)\, d\omega$$

$$\Rightarrow I = e^{\omega}\, sen(\omega) - I_1 = e^{\omega}\, sen(\omega) - e^{\omega} cos(\omega) - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} e^{\omega} \left[sen(\omega) - cos(\omega) \right] + C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{x}{2}\left[sen\big(ln(x)\big) - cos\big(ln(x)\big) \right] + C}$$

b) Por descomposición en fracciones parciales

Sea $$\frac{x-1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\ ;$$

$$x-1=A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)x \Rightarrow \begin{cases} si\ \ x=0 \ \ \Rightarrow \boxed{A=-1} \\ si\ \ x=-1 \ \Rightarrow -2=-2+B+C \\ \qquad\qquad \boxed{B=C} \\ si\ \ x=1 \ \ \Rightarrow 0=-2+B+C \\ \qquad\qquad B+C=2 \\ \qquad\qquad \boxed{C=1=B} \end{cases}$$

$$I=\int\frac{-dx}{x}+\int\frac{x+1}{x^2+1}dx=-ln\left(x\right)+\int\frac{x}{x^2+1}dx\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$I=-ln\left(x\right)+ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)+ang\,tan\left(x\right)+C$$

$$\Rightarrow \boxed{I=ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)+ang\,tan\left(x\right)+C}$$

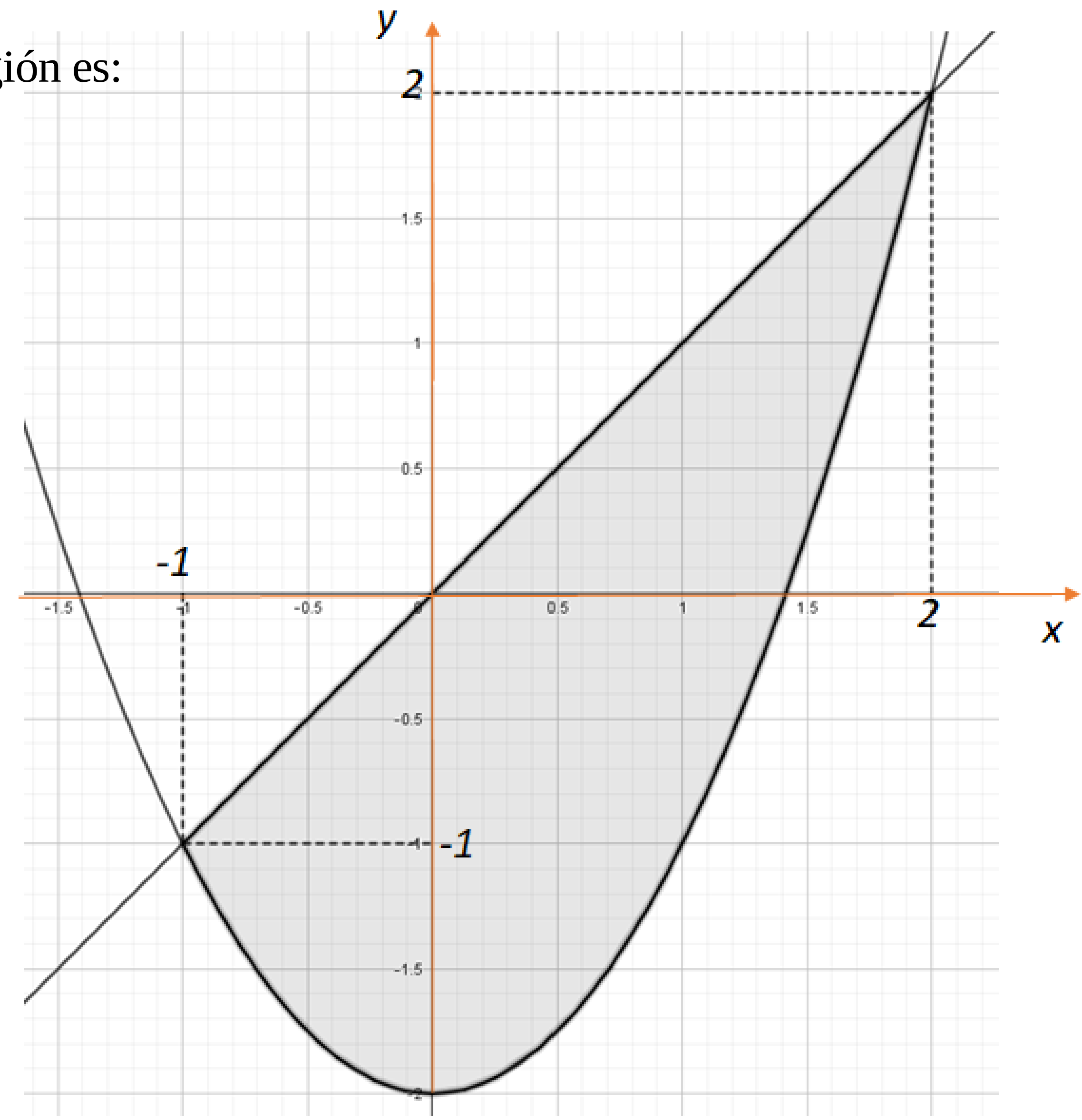
c) Se completa el trinomio cuadrado perfecto

$$I=\int\frac{dx}{x^2-4x+9}$$

$$I=\int\frac{dx}{\left(x-2\right)^2+5}\Rightarrow \boxed{I=\frac{1}{\sqrt{5}}ang\,tan\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right)+C}$$

30 Puntos

4. La región es:



$$A=\int_{-1}^{2}\left[x-\left(x^{2}-2\right)\right]dx=\left[\frac{x^{2}}{2}-\frac{x^{3}}{3}+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$A=2-\frac{8}{3}+4-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2\right]=6-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+2$$

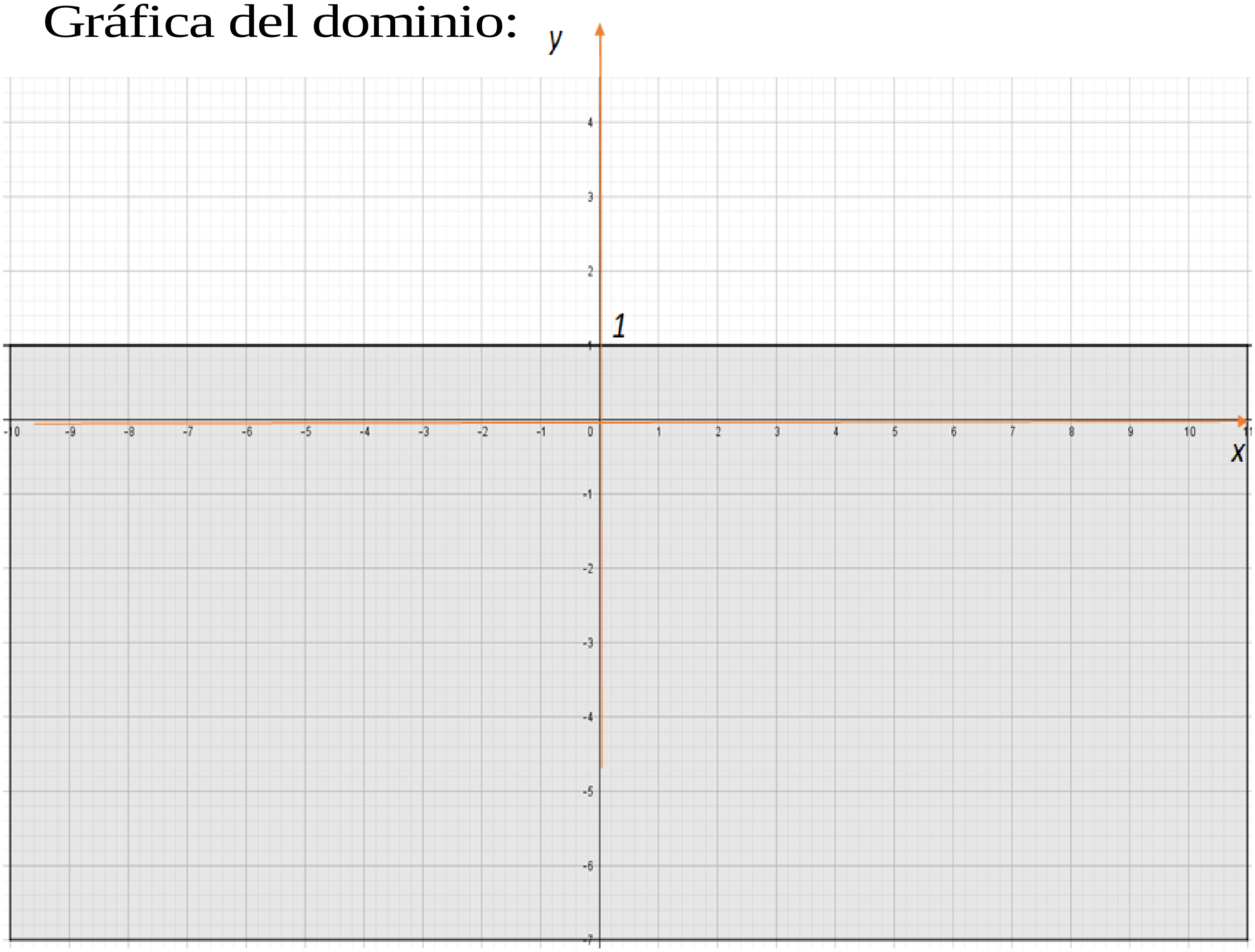
$$A=8-3-\frac{1}{2}=5-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{9}{2}u^{2}}$$

10 Puntos

5.

$$\boxed{D_f = \left\{ (x,y) \mid (1-x)^2 (1-y) \geq 0 \right\}}$$

Gráfica del dominio:



$$\boxed{R_f = \left\{ z \mid z \geq 0 \right\}}$$

15 Puntos

6.

Sea:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x \cdot sen\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x^2}{y^2} \cdot sen\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{x^2}{y^2} \cdot cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{1}{y}\right) + \left(\frac{2x}{y^2}\right) \cdot sen\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{x^2}{y^3} \cdot cos\left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{2x}{y^2}\right) \cdot sen\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(\pi,1)} = -\pi^2}$$

15 Puntos