UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL
1221
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO
TIPO "A"

30 de noviembre de 2018 ***Semestre 2019-1***

*Nombre:*______________________________________ *No. Cta.:*____________

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Empleando el criterio del Cociente o de D'Alembert, determina el carácter de la siguiente serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,3^n}{(n-1)!}$$

15 puntos

---

2. Determina si la siguiente integral converge o diverge

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\,dx$$

15 puntos

---

3. Efectúa:

$$a)\ \int \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx \qquad b)\ \int x\cos(x)\,dx \qquad c)\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$$

30 Puntos

4. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de:

$$y^2 + x - 1 = 0 \qquad \text{y} \quad \text{de} \qquad 2y - x - 2 = 0$$

Haz la representación gráfica de la región.

10 Puntos

---

5. Obtén el recorrido de la función f, y representa gráficamente su dominio.

$$f(x, y) = e^{\sqrt{xy}}$$

15 Puntos

---

6. Calcula la derivada direccional de la función $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}} - sen(x - y)$ en el punto $P(1, 1)$ y en la dirección del vector $\vec{v} = (-1, 1)$.

15 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

1221

Solución del Primer Examen Final

Tipo "A"

Semestre 2019 – 1

1. Sea:

$$r=\frac{\dfrac{(n+1)3^{n+1}}{n!}}{\dfrac{(n)3^{n}}{(n-1)!}}=\frac{3}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} r=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=0\cdot 1=0=\rho$$

$$como \quad |\rho|<1 \quad , \quad la \;\; serie \;\; es \;\; convergente$$

15 Puntos

2. Es impropia:

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\int_0^1\left(\sqrt{x}+1\right)^{1/2}\left(\frac{dx}{2\sqrt{x}}\right)\right)$$

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{4}{3}\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right)^{3}}\right]_{0+\varepsilon}^{1}$$

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{4}{3}\sqrt{2^{3}}-\frac{4}{3}\sqrt{\left(\sqrt{0+\varepsilon}+1\right)^{3}}\right]$$

$$I=\frac{4}{3}\sqrt{8}-\frac{4}{3}=\boxed{\frac{4}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)}$$

por lo que la integral converge

15 puntos

3. Solución

a) Se completa la diferencial y se separa

$$I=\int\left[\frac{2x+1-1}{x^2+2x+2}\right]dx=\int\frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx-\int\frac{dx}{x^2+2x+2}$$

$$\Rightarrow \boxed{I=ln\left(x^2+2x+2\right)-ang\,tan\left(x+1\right)+C}$$

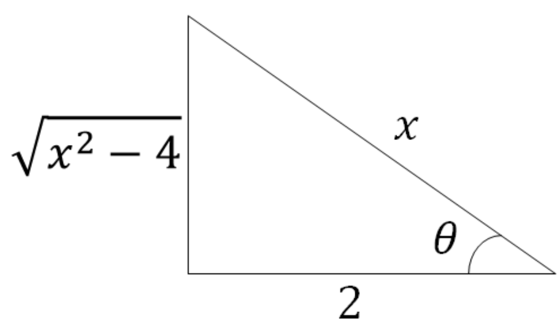
b) Por partes

$$\left|\begin{array}{l} u=x \\ du=dx \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} dv=cos(x)dx \\ v=sen(x) \end{array}\right.$$

$$I=xsen(x)-\int sen(x)dx$$

$$I=\boxed{xsen(x)+cos(x)+C}$$

c) Por sustitución trigonométrica



$$x=2\,sec\,\theta$$

$$\sqrt{x^2-4}=2\,tan\,\theta$$

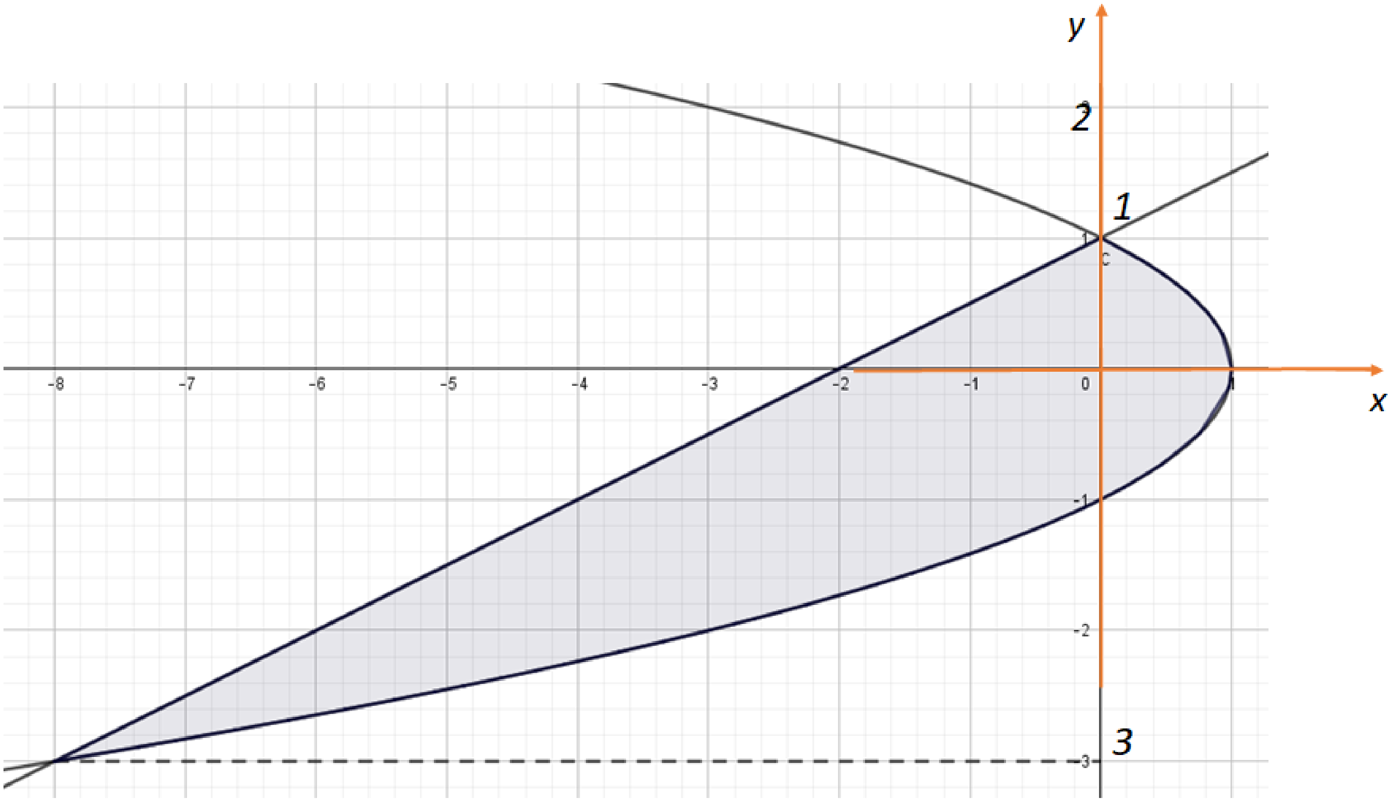
$$dx=2\,sec\,\theta\cdot tan\,\theta\cdot d\theta$$

$$I=\int\frac{2\,sec\,\theta\cdot tan\,\theta}{4\,sec^2\,\theta\cdot 2\,tan\,\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int\frac{d\theta}{sec\,\theta}=\frac{1}{4}\int(cos\,\theta)d\theta$$

$$I=\frac{1}{4}sen\,\theta+C \quad \Rightarrow \boxed{I=\frac{\sqrt{x^2-4}}{4x}+C}$$

30 Puntos

4. La región es:



$$A=\int_{-3}^{1}\left[\left(-y^2+1\right)-\left(2y-2\right)\right]dy$$

$$A=\int_{-3}^{1}\left[-y^2-2y+3\right]dy$$

$$A=\left[-\frac{y^3}{3}-y^2+3y\right]_{-3}^{1}$$

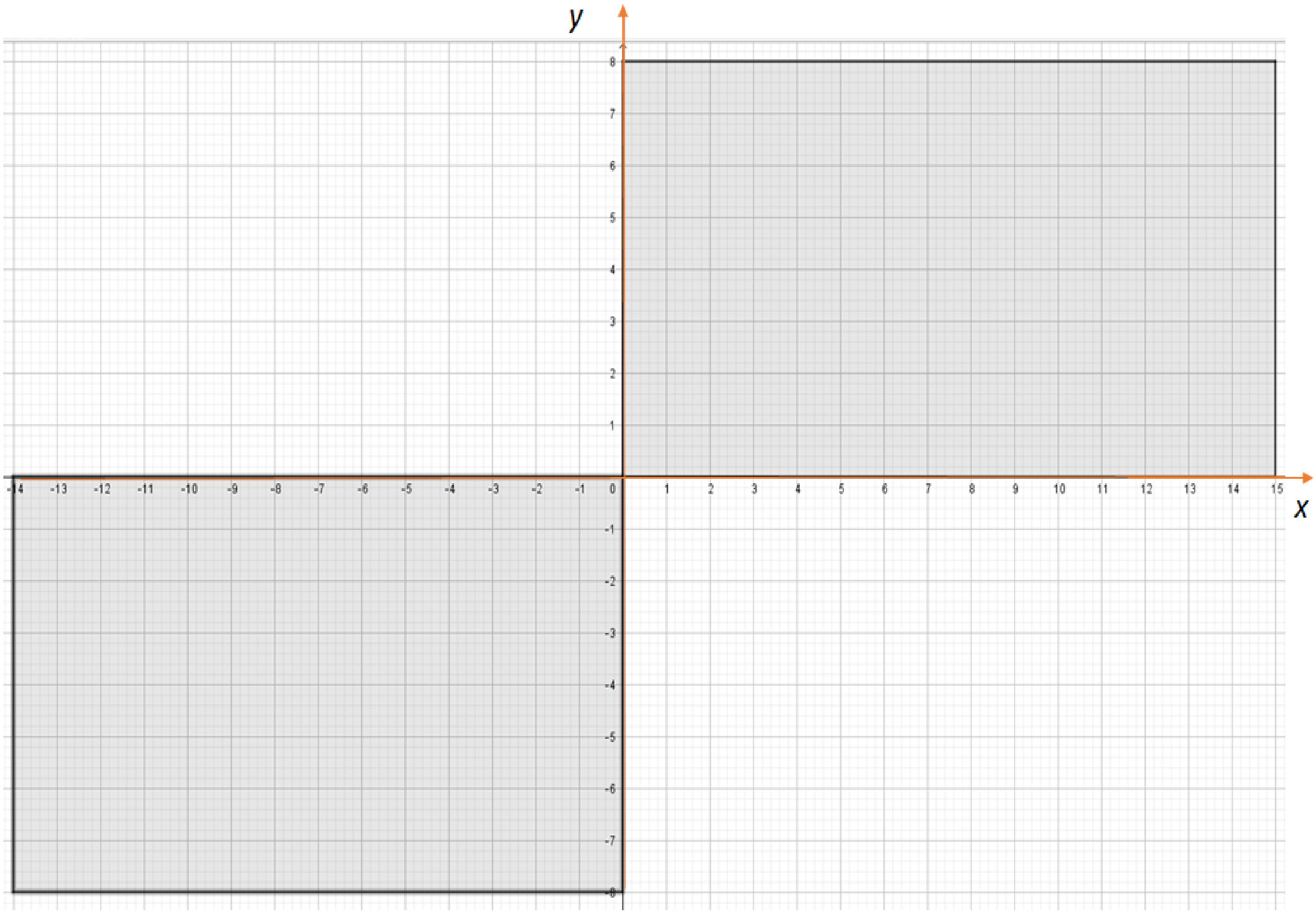
$$A=-\frac{1}{3}-1+3-\left[9-9-9\right]=-\frac{1}{3}+11=\boxed{\frac{32}{3}u^2}$$

10 Puntos

S1EE19-1A

5.

Región de definición:



$$\boxed{R_f = \left\{ z \mid z \in [1, \infty) \right\}}$$

15 Puntos

6.

Si:

$$\frac{df}{dx}=\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}-cos\left(x-y\right) \quad \Rightarrow \left.\frac{df}{dx}\right|_{(1,1)}=e-1$$

$$\frac{df}{dy}=-\frac{x}{y^{2}}e^{\frac{x}{y}}+cos\left(x-y\right) \quad \Rightarrow \left.\frac{df}{dy}\right|_{(1,1)}=-e+1$$

$$sea \quad \overline{u_{v}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{df}{dS}=\overline{\nabla}f\square\overline{u}=(e-1)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+(-e+1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{df}{dS}=-\frac{e}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{e}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{df}{dS}=\sqrt{2}-\sqrt{2}e=\boxed{\sqrt{2}\left(1-e\right)}$$

15 Puntos