UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL

1221

PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO

TIPO "C"

7 de diciembre de 2017 *Semestre 2018-1*

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

1. **Obtén la serie de Taylor de la función** $f(x) = e^{x-1}$ **alrededor de** $a = 1$

15 puntos

2. **Calcula, si existe:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$$

15 puntos

3. **Efectúa las integrales.**

$$a)\int \tan^3 x\,dx \qquad b)\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}} \qquad c)\int \frac{x+4}{x^2-2x}\,dx$$

30 puntos

4. Calcula el volumen del sólido que se genera al hacer girar, alrededor del eje de las abscisas, la región limitada por las gráficas de $y = senh\,x$, $y = cosh\,x$, $x = 0$ **y** $x = ln\,2$.

10 puntos

---

5. Traza la gráfica de la función $f(x,y) = \sqrt{4x^2 + y^2 - 4}$ **, representa gráficamente su dominio y determina su recorrido.**

15 puntos

---

6. Calcula $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(1,1)}$ **de** $f(x,y) = y\,e^{\frac{y}{x}}$ **.**

15 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
CÁLCULO INTEGRAL
1221
Solución del Primer Examen Final
Tipo "C"
Semestre 2018 – 1

1.

$$\text{Si } f^{n}(x)=e^{x-1}, \quad \text{entonces } f^{n}(a)=f^{n}(1)$$

$$f^{n}(1)=1 \quad \text{al sustituir en la serie de Taylor}$$

$$e^{x-1}=f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^{n}$$

$$e^{x-1}=f(1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^{n} \quad ó$$

$$\boxed{e^{x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n}}{n!}}$$

15 puntos

2.

$$\text{Si } y=\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad ln(y)=\frac{x}{2}ln\left(1-\frac{2}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\left[ln(y)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}\right]=\frac{0}{0} \quad \text{se aplica L'Hôpital}$$

$$\Rightarrow \quad ln\left[\lim_{x\to\infty}(y)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\dfrac{\dfrac{2}{x^2}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}}{-\dfrac{2}{x^2}}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-1}{1-\dfrac{2}{x}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad ln\left[\lim_{x\to\infty}(y)\right]=-1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}(y)=e^{-1} \quad \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{e}}$$

15 Puntos

3. Solución

a) Por identidades trigonométricas

Si $\quad tan^3(x)=tan^2(x)\cdot tan(x)=\left(sec^2(x)-1\right)\cdot tan(x)$

$$\Rightarrow \quad \int tan^3(x)dx=\int tan(x)sec^2(x)dx-\int tan(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I=\frac{tan^2(x)}{2}+ln(cos\,x)+C}$$

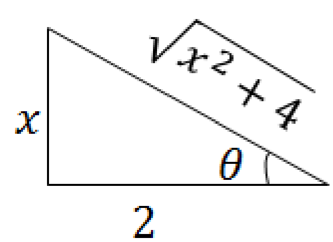
b) Por sustitución trigonométrica

$x=2tan\,\theta$

$\sqrt{x^2+4}=2\,sec\,\theta$

$\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}=8\,sec^3\theta$

$dx=2\,sec^2\theta d\theta$



$$I=\int\frac{2\,sec^2\theta d\theta}{8\,sec^3\theta}=\frac{1}{4}\int cos\,\theta d\theta=\frac{1}{4}sen\theta+C$$

$$\boxed{I=\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}+C}$$

c) Por descomposición en fracciones parciales

Sea $\dfrac{x+4}{x(x-2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-2}$;

$$x+4=A(x-21)+Bx \Rightarrow \begin{cases} si\ \ x=0 \quad \Rightarrow \boxed{A=-2} \\ si\ \ x=2 \quad \Rightarrow \boxed{B=3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int\left[-\frac{2}{x}+\frac{3}{x-2}\right]dx$$

$$I=-ln\left(x^2\right)+ln(x-2)^3+C$$

$$\Rightarrow \boxed{I=ln\left(\frac{(x-2)^3}{x^2}\right)+C}$$

30 Puntos

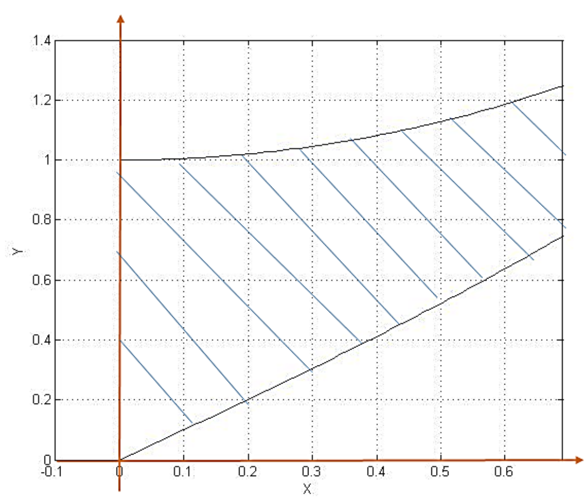
---

4. La región es:

$$V=\pi\int_0^{ln\,2}\left[cosh^2 x-senh^2 x\right]dx$$

$$V=\pi\int_0^{ln\,2} dx=\left[\pi x\right]_0^{ln\,2}$$

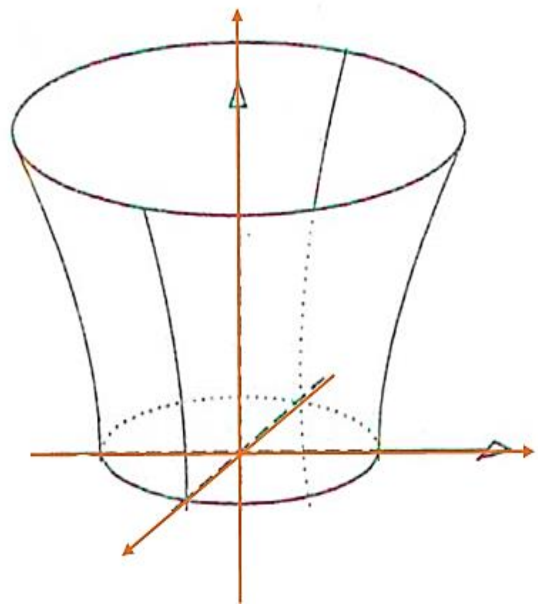
$$\boxed{V=\pi\,ln\,2 \text{ unidades de volumen}}$$



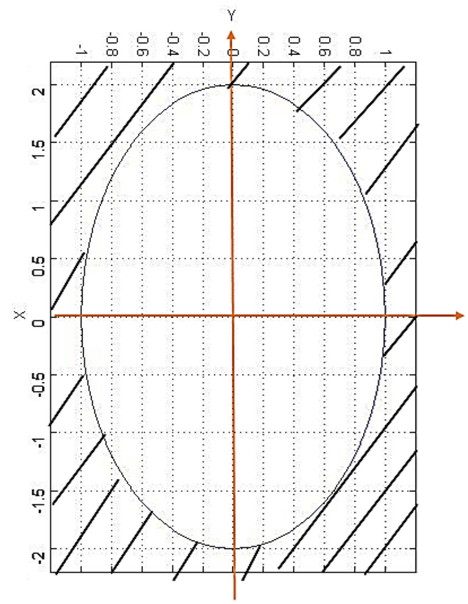
10 Puntos

5.

Gráfica de la función



Gráfica del dominio



$$\boxed{R_z = \{ z \mid z \geq 0 \}}$$

15 Puntos

6.

$$\text{Sea} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y e^{\frac{y}{x}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y^2}{x^2} e^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{y^2}{x^2} e^{\frac{y}{x}} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{2y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right|_{(1,1)} = -e - 2e = \boxed{-3e}$$

15 Puntos