UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL
1221
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO
TIPO "C"

30 de mayo de 2017 ***Semestre 2017-2***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los 6 **reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

1. Obtener el intervalo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n-1}}{3^{n+1}}$$

15 puntos

2. Si el valor medio de la función $f(x)=1+\sqrt[3]{x+1}$ **en el intervalo** $[\,a\,,0\,]$ **es** 1 **, calcular el valor de** $a<0$**, tal que cumpla con el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.**

15 puntos

3. Efectuar

$$a)\int \frac{2x+3}{x^3+4x}\,dx \qquad b)\int \frac{dx}{x\left(1+\ln x\right)} \qquad c)\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$$

30 puntos

---

4. Calcular la longitud de la gráfica de la función $f(x)=1+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ **en el intervalo** $[0,1]$

10 puntos

---

5. Obtener la ecuación cartesiana del plano tangente a la gráfica de la función $f(x,y)=\ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$**, en el punto** $\mathrm{P}(1,\,0)$ **.**

20 Puntos

---

6. Traza la gráfica del dominio de la función f **y obtener su recorrido si** $f(x,y)=\sqrt{y^2-x^2-1}$

10 puntos

1.

Sea

$$r=\frac{\dfrac{(x-3)^n}{3^{n+2}}}{\dfrac{(x-3)^{n-1}}{3^{n+1}}}=\frac{(x-3)^n\,3^{n+1}}{(x-3)^{n-1}\,3^{n+2}}$$

$$r=\frac{(x-3)}{3}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}r=\lim_{n\to\infty}\frac{(x-3)}{3}=\frac{(x-3)}{3}$$

$$Sea\ \left|\frac{x-3}{3}\right|<1\Rightarrow -1<\frac{x-3}{3}<1$$

$$\Rightarrow -3<x-3<3$$

$$\Rightarrow \boxed{0<x<6}$$

$$Si\quad x=0$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n(-3)^{-1}}{(3)^n\,3}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{1}{9}\right)$$

que es divergente

$$Si\quad x=6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot 3^{-1}}{3^n\cdot 3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9}$$

es convergente

$\therefore$ el intervalo es el obtenido

15 puntos

2.

Sea

$$f(c)=\frac{\displaystyle\int_a^0\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)dx}{-a}=1$$

$$f(c)=\frac{x+\frac{3}{4}(x+1)^{4/3}\Big]_0^a}{-a}=\frac{0+\frac{3}{4}-\left(a+\frac{3}{4}a^{4/3}\right)}{-a}=1$$

por lo que

$$\frac{3}{4}-a-\frac{3}{4}a^{4/3}=-a$$

$$\frac{3}{4}a^{4/3}=\frac{3}{4}\quad\therefore\quad a=\pm1\ ,\ a<0\Rightarrow\boxed{a=-1}$$

15 puntos

3.

a) $\displaystyle\int\frac{2x+3}{x^3+4x}dx$ Por fracciones parciales

$$\mathrm{I}=\int\frac{2x+3}{x^3+4x}dx=\int\frac{3}{4x}dx+\int\frac{-\frac{3}{4}x+2}{x^2+4}dx$$

$$\mathrm{I}=\frac{3}{4}\ln x-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{2}{2}ang\tan\frac{x}{2}+C$$

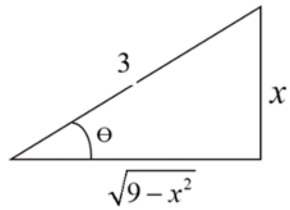
$$\boxed{\mathrm{I}=\frac{3}{4}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)+ang\tan\frac{x}{2}+C}$$

b) *Inmediata*

$$I=\int(1+\ln x)\left(\frac{dx}{x}\right)=\ln(1+\ln x)+C$$

c) Por sustitución trigonométrica

$$x = 3\,sen\,\theta$$



$$\sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta$$

$$dx = 3\cos\theta\, d\theta$$

$$\mathrm{I} = \int \frac{3\cos\theta\; 3\cos\theta\; d\theta}{3^2\, sen^2\theta}$$

$$\mathrm{I} = \int \cot^2\theta d\theta = \int \left(\csc^2\theta - 1\right) d\theta = -\cot\theta - \theta + C$$

$$\boxed{\mathrm{I} = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - ang\,\mathrm{sen}\frac{x}{3} + C}$$

30 puntos

4.

Sea

$$y = 1 + \frac{4}{3}x^{3/2}$$

$$y' = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$y' = 2\sqrt{x}$$

$$\left(y'\right)^2 = 4x$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+4x}\, dx = \int_0^1 (1+4x)^{1/2}\, dx$$

$$L = \frac{2\cdot 1}{3\cdot 4}(1+4x)^{3/2}\Big]_0^1$$

$$L = \frac{1}{6}(1+4x)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}\left[5^{3/2} - 1\right] = \boxed{\frac{1}{6}\left[5\sqrt{5} - 1\right]\ unidades\ de\ longitud}$$

10 puntos

5. La ecuación del plano tiene la forma:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_p (x-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_p (y-y_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_p (z-z_0)=0$$

donde: $\quad \mathrm{F}(x,y,z)=\ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)-z \quad y \quad P(1,0,0)$

$$0(x-1)-2(y-0)-(z-0)=0$$

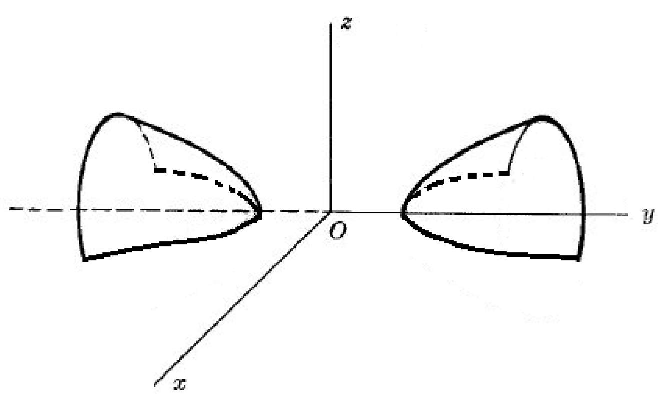
$$-2y-z=0$$

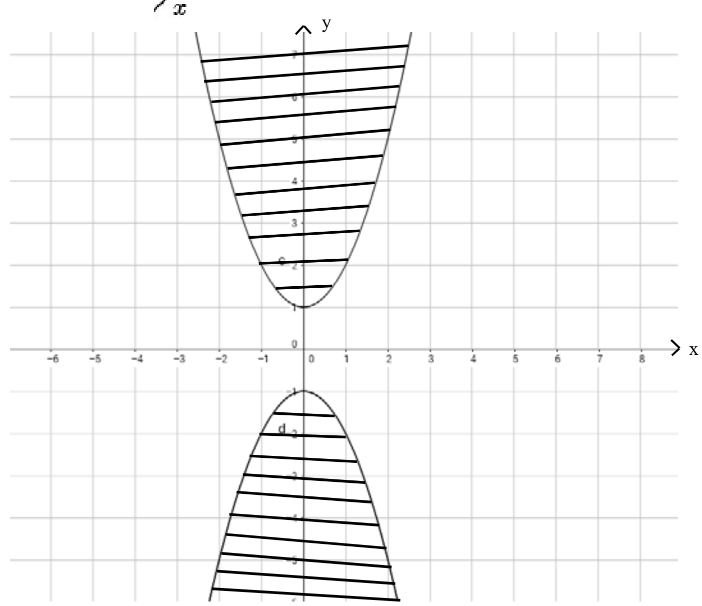
$$\boxed{2y+z=0}$$

20 puntos

6.

$$R_f=\{z \mid z\in[0,\infty)\}$$





10 puntos