UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL

1221

PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO

TIPO "A"

30 de mayo de 2017 *Semestre 2017-2*

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los 8 **reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Obtener la serie de Maclaurin de la función

$$g(x) = \frac{1}{2(x-1)^2}$$

15 puntos

---

2. Calcular el valor medio de la función f en el intervalo $[0,2]$ y obtener el o los valores de $C \in (0,2)$ tal que se cumpla el Teorema del Valor Medio del Calculo Integral. Si $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x-1}$

15 puntos

---

3. Efectuar por partes

$$\int \frac{x}{2\sqrt{1+x}}\,dx$$

10 puntos

---

4. Mediante sustitución trigonométrica efectuar

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

10 puntos

5. Hacer por fracciones parciales

$$\int \frac{x+1}{2x^3-8x}\,dx$$

10 puntos

---

6. Calcular el volumen de sólido de revolución que se obtiene al hacer girar alrededor del eje de las abscisas, la región limitada por las gráficas de $y = \tan x$, $x = \frac{\pi}{4}$ y $y = 0$. **Representar gráficamente el sólido.**

10 puntos

---

7. Calcular la derivada direccional de la función $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ **en el punto** $P\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ **y en la dirección del vector** $\bar{v} = (-1, 1)$

15 puntos

---

8. Obtener $\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right|_{(1,\,-1)}$ **de** $f(x, y) = \frac{1}{xy}$

15 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
CÁLCULO INTEGRAL
1221
Solución del Primer Examen Final Colegiado
Tipo "A"
Semestre 2017-2

1.

$$Si\ g(x) = \frac{1}{2(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1 \cdot 2}{(x-1)^3}$$

$$g''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(x-1)^4}$$

$$\bullet$$

$$\bullet$$

$$\Rightarrow \quad g^n(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}(-1)^n$$

$$\Rightarrow \quad g^n(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)!}{(-1)^{n+2}}(-1)^n = \frac{1}{2}(n+1)!$$

Por lo que la serie tiene la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(n+1)!}{n!} x^n =$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n}$$

15 puntos

---

2. Sea el valor medio

$$f(c) = \frac{\int_0^2 \left(1 + \sqrt[3]{x-1}\right) dx}{2} = \frac{x + \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x-1)^4}\ \Big]_0^2}{2} = \frac{2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}}{2}$$

$\boxed{f(c) = 1}$ si $f(c) = 1 + \sqrt[3]{c-1}$, entonces

$1 = 1 + \sqrt[3]{c-1} \Rightarrow \boxed{c = 1}$

15 puntos

3. Si

$$u = \frac{x}{2} \qquad dv = (1+x)^{-1/2}\,dx$$

$$du = \frac{dx}{2} \qquad v = 2\sqrt{1+x}$$

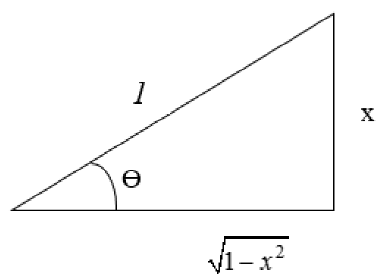
$$I = x\sqrt{1+x} - \int \sqrt{1+x}\,dx$$

$$\boxed{I = x\sqrt{1+x} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3} + C}$$

10 puntos

---

4. Sea



$$x = \operatorname{sen}\theta$$

$$\sqrt{1+x^2} = \cos\theta$$

$$dx = \cos\theta\,d\theta$$

$$I = \int \frac{\cos\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\,\cos\theta}$$

$$I = \int \csc^2\theta = -\cot\theta + C = \boxed{-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C}$$

10 puntos

---

5. Sea la función

$$\frac{x+1}{2x\left(x^2-4\right)} = \frac{x+1}{2x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{2x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

$$\Rightarrow \quad x+1 = A(x-2)(x+2) + B(2x)(x-2)$$

$Si \quad x = 0$	$Si \quad x = 2$	$Si \quad x = -2$
$1 = -4A$	$3 = 16B$	$-1 = 16C$
$\boxed{A = -1/4}$	$\boxed{B = 3/16}$	$\boxed{C = -1/16}$

$$I = -\frac{1}{8}\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{16}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$\boxed{I = -\frac{1}{8}\ln x + \frac{3}{16}\ln(x-2) - \frac{1}{16}\ln(x+2) + C}$$

10 puntos

6.

$$v = \pi \int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx = \pi \int_0^{\pi/4} \left(\sec^2 x - 1\right) dx$$

$$v = \pi \left(\tan x - x \Big|_0^{\pi/4} \right) = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} - 0 \right) = \boxed{\pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) u^3}$$

10 puntos

7.

$$Sea\ \overline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial x} j$$

$$\overline{\nabla} f = \left(e^x \operatorname{sen} y\right) i + \left(e^x \cos y\right) j \Rightarrow \overline{\nabla} f \Big| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\frac{df}{ds} = \overline{\nabla} f \cdot \overline{u}_v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{0}$$

15 puntos

8.

$$Sea\ \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2 y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3 y} \quad \text{por lo que}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = -\frac{2}{x^3 y^2} \quad \therefore \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}\Bigg|_{(1,-1)} = \boxed{-2}$$

15 puntos