UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL
1221
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO

TIPO "A"

2 de diciembre de 2016 ***Semestre 2017-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los 6 **reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Emplear el criterio del cociente y de D'Alembert para determinar el carácter de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n-1)!}$$

15 puntos

---

2. Empleando la regla de L'Hôpital, calcular el límite:

$$\lim_{x\to 0^+} 3x \ln x$$

15 puntos

3. Efectuar

$$a)\int 2\,x\,ang\,sec\,x\,dx \qquad b)\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx \qquad c)\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$$

30 puntos

---

4. Calcular el volumen del solido que se forma al hacer girar, alrededor del eje de las ordenadas la región limitada por las gráficas de

$$x=1$$

$$y=x^2+1$$

$$y=1$$

10 puntos

---

5. Trazar la gráfica del dominio de la función f e identificar sus curvas de nivel para $z=0$ y $z=1$

$$f\left(x,\,y\right)=\sqrt{\,x^{\,2}+y^{\,2}-1}$$

10 Puntos

---

6. Calcular el valor de la derivada direccional de la función $f\left(x,\,y\right)=ln\;y^{\,x}+ln\;x^{\,y}$ en el punto $\mathrm{P}\left(1,1\right)$ y en la dirección del vector $\overline{v}=i+j$

20 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

1221

Solución del Primer Examen Final Colegiado

Tipo "A"

Semestre 2017 – 1

1.

Sea

$$r=\frac{\dfrac{4^{n+1}}{n!}}{\dfrac{4^{n}}{(n-1)!}}=\frac{4^{n+1}(n-1)!}{4^{n}n!}=\frac{4}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} r=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0=\varphi \qquad \text{si } |\varphi|<1$$

La serie converge: $0<1$, por lo tanto

la serie es convergente

15 Puntos

2.

Si $3x\ln x$ se escribe como:

$$\lim_{x\to 0+}\left[\frac{3\ln x}{\dfrac{1}{x}}\right]=-\frac{\infty}{\infty}\text{, se puede aplicar L'Hôpital}$$

$$\lim_{x\to 0+}\left[\frac{\dfrac{3}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to 0+}\left[-\frac{3x^2}{x}\right]=\lim_{x\to 0+}(-3x)=0$$

15 Puntos

3.

a) Por partes

$$u = arg\,sec\,x \qquad dv = 2x\,dx$$

$$du = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad v = x^2$$

$$I = x^2\,arg\,sec\,x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$\boxed{I = x^2\,arg\,sec\,x - \sqrt{x^2-1} + C}$$

b) Por fracciones parciales

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx = \int\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx$$

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \Rightarrow 2 = A(x+1)+B(x-1)$$

$$\begin{array}{l||l} si\quad x=1 & si\quad x=-1 \\ \Rightarrow\ A=1 & \Rightarrow\ B=-1 \end{array}$$

$$\Rightarrow I = x + \int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \boxed{x + ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+C}$$

c) Por sustitución trigonométrica

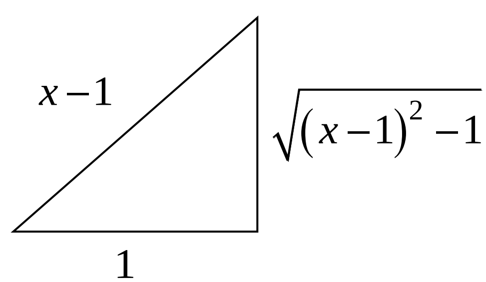
Sea $\quad x^2-2x = x^2-2x+1-1 = (x-1)^2-1$

entonces

$$x-1 = sec\,\theta$$

$$\sqrt{(x-1)^2-1} = tan\,\theta$$

$$dx = sec\,\theta\,tan\,\theta\,d\theta$$



$$I = \int\frac{sec\,\theta\,tan\,\theta\,d\theta}{tan\,\theta} = \int sec\,\theta\,d\theta$$

$$I = ln(sec\,\theta + tan\,\theta)+C$$

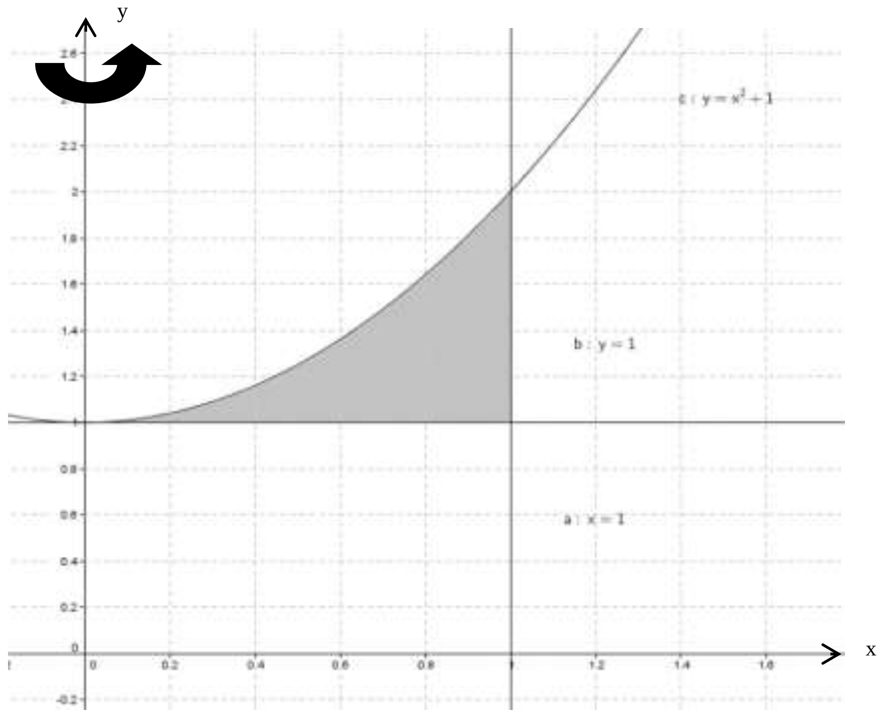
$$\boxed{I = ln\left[x-1+\sqrt{(x-1)^2-1}\right]+C}$$

30 Puntos

4.

Sea la región

$$V=\pi\int_{1}^{2}\left(1-\left(\sqrt{y-1}^{2}\right)\right)dy$$



$$V=\pi\int_{1}^{2}\left(1-y+1\right)dy$$

$$V=\pi\int_{1}^{2}\left(2-y\right)dy$$

$$V=\pi\left(2y-\frac{y^{2}}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2}$$

$$V=\pi\left(4-2-2+\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{V=\frac{\pi}{2}\ \text{unidades de volumen}}$$

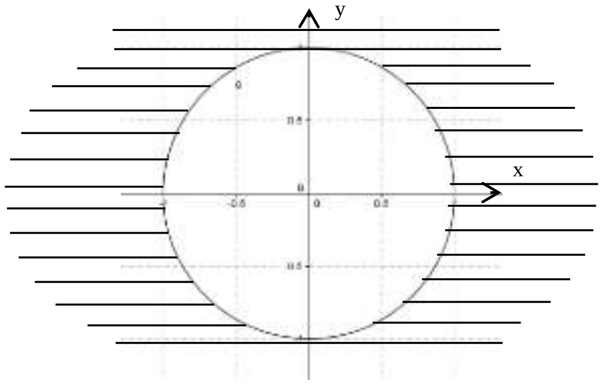
10 Puntos

5.

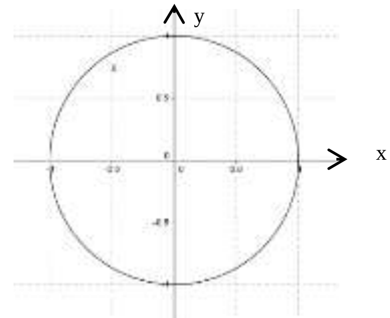
Sea $D_f = \left\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \right\}$

$R_f = \left\{ z \mid z \geq 0 \right\}$

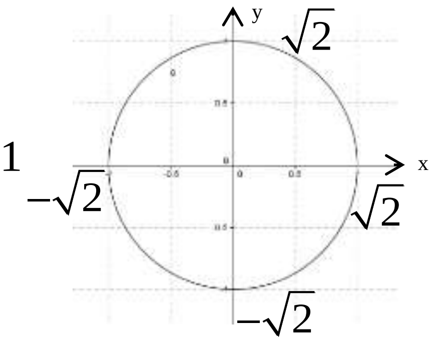
La gráfica del dominio es



$Si \quad z = 0$



$Si \quad z = 1$



10 Puntos

6.

Sea $\overline{\nabla} f = \left(\frac{y}{x} + ln\, y, \frac{x}{y} + ln\, x \right)$

$\overline{\nabla} f \Big|_p = (1,1) \qquad \overline{u_v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

$$\frac{df}{ds} = (1,1) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2}$$

20 Puntos