UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO
TIPO "A"

2 de diciembre de 2015 ***Semestre 2016-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Si el valor medio de la función $f(x) = x - 1$ en el intervalo $[0, a]$ es cero, calcular el valor de $a > 0$.

15 Puntos

---

2. Calcular, si existe, el límite

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

15 Puntos

---

3. Efectuar:

a) $\displaystyle\int \sqrt{x}\, \ln x \, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}$ c) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{x^2 + 2x - 3}$

30 Puntos

4. Calcular el área de la región limitada por las gráficas de ecuación:

$$y = x^2 + 2x + 1 \qquad \text{y} \qquad y = 2x + 5$$

10 Puntos

---

5. Obtener la ecuación de las curvas de nivel de la función $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ y representar gráficamente las que corresponden a $z = 1$ y $z = 2$

15 Puntos

---

6. Obtener la ecuación de la recta normal a la superficie de ecuación $2xy - z + z^4 = -4$, en el punto $A(1, -2, 1)$

15 Puntos

Solución del Primer Examen Final Colegiado
Tipo "A"
Semestre 2016-1

1. Sea el valor medio

$$f(c)=\frac{\int_0^a (x-1)}{a-0}=0$$

$$\frac{\left.\frac{x^2}{2}-x\right|_0^a}{a}=0 \qquad \text{de donde}$$

$$a=0 \quad y \quad \boxed{a=2}$$

15 Puntos

2. Si efectuamos el quebrado

$$\lim_{x\to1}\left[\frac{x\ln x - x+1}{\ln x(x-1)}\right]=\frac{0}{0} \quad \text{al aplicar L'Hopital}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{1+\ln x-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\frac{0}{0} \qquad \text{aplicando nuevamente}$$

$$\lim_{x\to1}\left[\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]=\boxed{\frac{1}{2}}$$

15 Puntos

3. a) Por partes

$$u = \ln x \qquad dv = x^{1/2}\,dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

$$I = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\,\ln x - \frac{2}{3}\int x^{1/2}\,dx$$

$$I = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\,\ln x - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)x^{3/2} + c$$

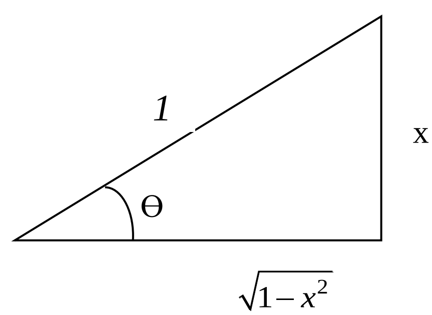
$$\boxed{I = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\,\ln x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + c}$$

b) Por sustitución trigonométrica

$$x = sen\,\theta$$

$$\sqrt{1-x^2} = \cos\theta$$

$$x^2 = sen^2\,\theta$$



$$I = \int \frac{\cos\theta\,d\theta}{sen^2\,\theta\,\cos\theta} = \int \csc^2\theta\,d\theta = -\cot\theta + c$$

$$\boxed{I = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c}$$

c) Por fracciones parciales

$$\frac{x}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \Rightarrow x = A(x+3) + B(x-1)$$

$$si \quad x=-3 \qquad\qquad si \quad x=1$$

$$B = \frac{3}{4} \qquad\qquad A = \frac{1}{4}$$

$$I = \int \frac{dx}{4(x-1)} + \int \frac{3\,dx}{4(x+3)} = \ln\sqrt[4]{x-1} + 3\ln\sqrt[4]{(x+3)^3} + c$$

$$\boxed{I = \ln\sqrt[4]{(x-1)(x+3)^3} + c}$$

30 Puntos

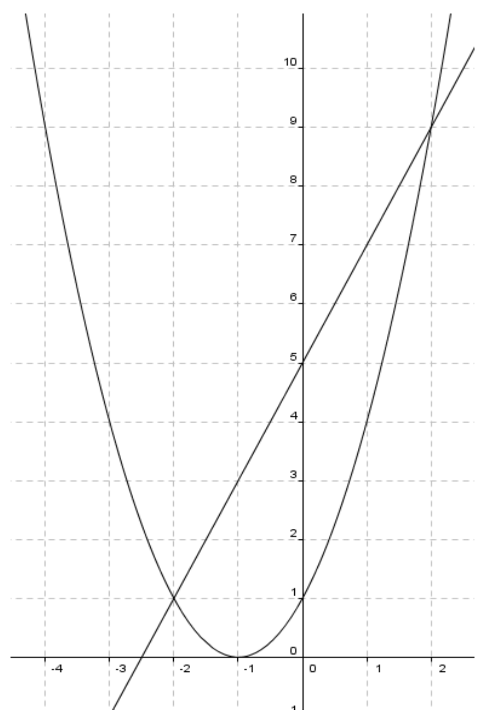
4. Sea la región

$$A = \int_{-2}^{2}\left[2x+5-\left(x^2+2x+1\right)\right]dx$$

$$A = \int_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)dx = -\frac{x^3}{3}+4x\Big]_{-2}^{2}$$

$$A = -\frac{8}{3}+8-\left(\frac{8}{3}-8\right)$$

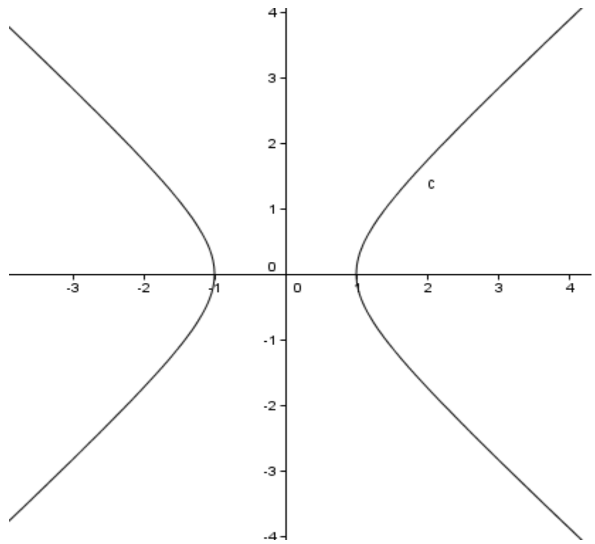
$$A = -\frac{16}{3}+16 = \boxed{\frac{32}{3}\,u^2}$$



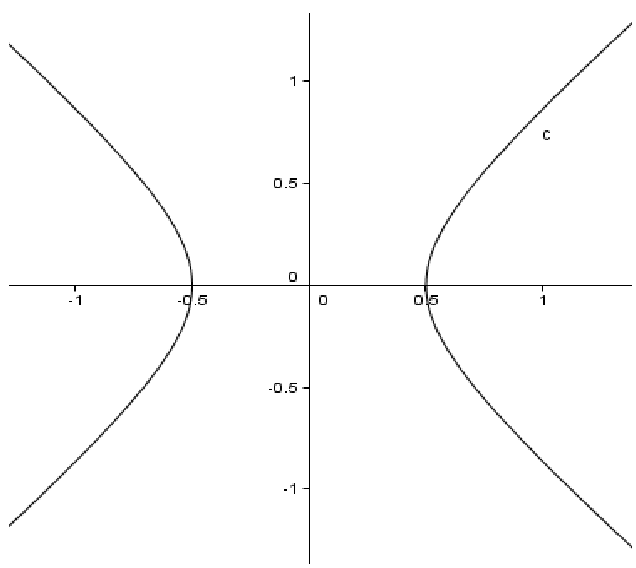
10 Puntos

5. Sea la ecuación que representa las curvas de nivel

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{z^2} \qquad si \quad z = 1 \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = 1$$



$$si \quad z = 2 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$$



15 Puntos

6. La ecuación de la recta normal tiene la forma

$$\frac{x-1}{\left.\frac{\delta F}{\delta x}\right|_P}=\frac{y+2}{\left.\frac{\delta F}{\delta y}\right|_P}=\frac{z-1}{\left.\frac{\delta F}{\delta z}\right|_P}$$

$$\frac{\delta F}{\delta x}=2y$$

$$\frac{\delta F}{\delta y}=2x$$

$$si \quad P\left(1,-2,1\right),\ entonces$$

$$\boxed{\frac{x-1}{-4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}}$$

$$\frac{\delta F}{\delta z}=4z^3-1$$

15 Puntos