UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales:* *M.E.M. Enrique Arenas Sánchez
Ing. S. Carlos Crail Corzas

19 de septiembre de 2019 ***Semestre 2020-1***

1221

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

Nombre:_________________________________ No. de cuenta:______________

1. Obtén la serie de Maclaurin de la función

$$g\left(x\right) = ln\left(1 - x\right)$$

15 puntos

2. Calcula, si existe, el valor de

$$\lim_{x \to 0^{+}} \left(1 + 2x\right)^{\frac{1}{x}}$$

15 puntos

3. Efectúa las integrales

$$a)\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}} \qquad b)\int x \, ang\sec\; x\; dx \qquad c)\int \frac{3x}{x^2+x-2}\; dx$$

30 puntos

---

4. Calcula el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar, alrededor del eje de las abscisas, la región limitada por las curvas de ecuaciones

$x=0,\quad y=e^{-x},\quad y=0\quad$ y $\quad x=ln\,2$.

Representa gráficamente al sólido.

10 puntos

---

5. Sea la función $f\left(x,\,y\right)=\sqrt{x^2+9y^2-9}$

a) Representa gráficamente su dominio.

b) Traza la gráfica de la función.

15 puntos

---

6. Para la función $z=e^x\cos y+e^y\cos x$, calcula

$$\left.\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\right|_{(0,\ 0)}$$

15 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
CÁLCULO INTEGRAL

1221

Solución del Primer Examen Extraordinario
Semestre 2020 – 1

1.

$$Sea \quad g'(x) = \frac{-1}{1-x}$$

$$\Rightarrow \quad g''(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad g'''(x) = -\frac{1\cdot 2}{(1-x)^3}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \quad g^n(x) = \frac{-(n-1)!}{(1-x)^n} \quad \Rightarrow \quad g^n(0) = -(n-1)!$$

$$al \ \ sustituir \ \ en \ \ la \ \ serie:$$

$$\boxed{ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}}$$

15 Puntos

2. Al evaluar el límite:

$$\lim_{x\to 0^+} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}, \ \ por \ \ lo \ \ que:$$

$$y = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \quad ln\, y = \frac{ln(1+2x)}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \frac{0}{0}$$

Entonces se aplica L`Hopital :

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\frac{2}{1+2x}}{1} \right] = 2$$

$$\therefore \lim_{x \to 0^+} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \boxed{e^2}$$

15 Puntos

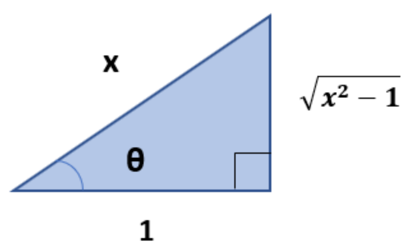
3. Solución

a) *Por sustitución :*

$$x = \sec\theta$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \tan\theta$$

$$dx = \sec\theta \tan\theta d\theta$$



$$I = \int \frac{\sec\theta \tan\theta d\theta}{\tan^3\theta} = \int \csc\theta d\theta$$

$$I = \ln[\csc\theta - \cot\theta]$$

$$I = \ln\left[\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{x - 1}} \right] + c$$

$$\boxed{I = \ln\left[\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + c \right]}$$

b) Por partes

$$u = ang\,sec\,x \qquad dv = xdx$$

$$du = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \frac{x^2}{2} ang\,sec\,x - \frac{1}{2}\int \left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}} xdx$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{x^2}{2} ang\,sec\,x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + c}$$

c) Por fracciones parciales

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \quad \Rightarrow 1 = A(x+2) + B(x-1)$$

si

$$x = -2 \quad \Rightarrow \; B = -\frac{1}{3}$$

si

$$x = 1 \;\; \Rightarrow \; A = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{3} ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) + c$$

$$\Rightarrow \boxed{I = ln\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}} + c}$$

30 Puntos

4.

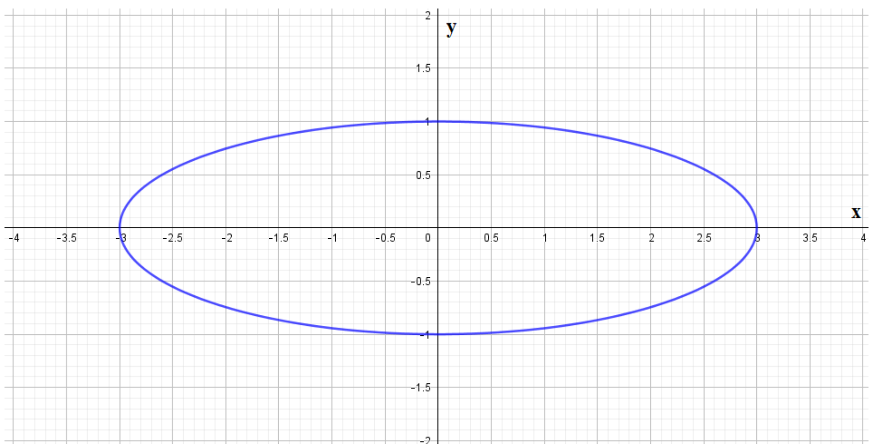
$$v=\pi\int_0^{ln2}\left[\left(e^{-x}\right)^2 dx = -\frac{\pi}{2}e^{-2x}\right]_0^{ln2}$$

$$v=-\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{4}-1\right]=-\frac{\pi}{2}\left[-\frac{3}{4}\right]=\boxed{\frac{3}{8}\pi \quad u^3}$$

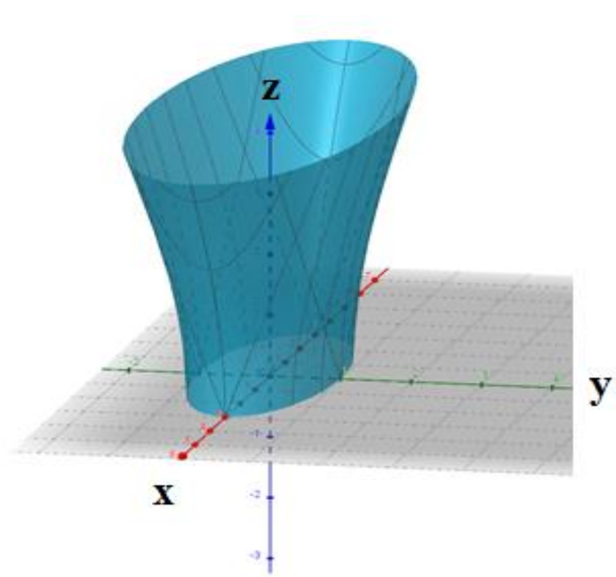
10 Puntos

5.

a) Dominio:



b) Gráfica de la función:



15 Puntos

6.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{x} seny + e^{y} \cos x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^{x} \cos y + e^{y} \cos x$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -e^{x} \cos y - e^{y} senx$$

$$\therefore \boxed{\left[\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \right]_{(0,0)} = -1}$$

15 Puntos