UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales:* *M.E.M. Margarita Ramírez Galindo
Ing. Héctor Hernández López

13 de marzo de 2019 ***Semestre 2019-2***

1221

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

*Nombre:*________________________________ *No. de cuenta:*______________

---

1. Obtener los cuatro primeros términos de la serie de Maclaurin de la función

$$g(x) = \sqrt{1 - x}$$

15 puntos

---

2. Sea la función $f(x) = \sqrt{2 + x}$ definida en el intervalo $[-2, -1]$. Determinar el valor de C cuya existencia garantiza el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, para la función e intervalo indicados.

15 puntos

3. Efectuar las integrales

$$a)\ \int 2\cos(\ln x)\,dx \qquad\qquad b)\ \int \frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

20 puntos

---

4. Representar gráficamente la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $y^2=-x$, $x-y=4$, $y=-1$ y $y=2$, y calcular el área de la región.

15 puntos

---

5. Sea la función $f(x, y)=\ln(4-x^2-y^2)$

a) Obtener su dominio.

b) Hacer la representación gráfica de su dominio.

15 puntos

---

6. Para la función $f(x, y)=e^{2x}\,sen\,y$

a) Determinar la dirección en la cual aumenta más rápidamente en el punto $P\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

b) Obtener la máxima razón de cambio.

20 puntos

1.

$$Si \quad g(x)=(1-x)^{1/2} \qquad \Rightarrow \qquad g(0)=1$$

$$\Rightarrow \quad g'(x)=-\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2} \qquad \Rightarrow \qquad g'(0)=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad g''(x)=-\frac{1}{2^2}(1-x)^{-3/2} \qquad \Rightarrow \qquad g''(0)=-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad g'''(x)=-\frac{3}{2^3}(1-x)^{-5/2} \qquad \Rightarrow \qquad g'''(0)=-\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4\cdot 2!}x^2-\frac{3}{8\cdot 3!}x^3}$$

15 Puntos

2. Sea:

$$f(c)=\frac{\displaystyle\int_{-2}^{-1}\left[(2+x)^{1/2}\right]dx}{-1-(-2)}=\frac{\left[\frac{2}{3}(2+x)^{3/2}\right]_{-2}^{-1}}{1}$$

$$f(c)=\left[\frac{2}{3}\sqrt{(2+x)^3}\right]_{-2}^{-1}=\frac{2}{3}-0=\boxed{\frac{2}{3}}$$

$$Si \quad f(c)=\sqrt{2+c} \quad \Rightarrow \sqrt{2+c}=\frac{2}{3}$$

$$c=\frac{4}{9}-2=\frac{4}{9}-\frac{18}{9}=\frac{-14}{9} \Rightarrow \quad \boxed{c=-\frac{14}{9}}$$

15 Puntos

3. Solución

a) Por cambio de variable y por partes

$$\omega = ln(x) \quad \Rightarrow \quad e^{\omega} = x \quad \Rightarrow \quad e^{\omega} d\omega = dx$$

$$I = 2\int cos(\omega) e^{\omega} d\omega$$

$$\left| \begin{array}{l} u = cos(\omega) \\ du = -sen(\omega) d\omega \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} dv = e^{\omega} d\omega \\ v = e^{\omega} \end{array} \right.$$

$$I = 2e^{\omega} cos(\omega) + 2\int sen(\omega) e^{\omega} d\omega$$

$$\Rightarrow I_1 = 2\int sen(\omega) e^{\omega} d\omega$$

$$\left| \begin{array}{l} u_1 = sen(\omega) \\ du_1 = cos(\omega) d\omega \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} dv_1 = e^{\omega} d\omega \\ v_1 = e^{\omega} \end{array} \right.$$

$$I_1 = 2e^{\omega} sen(\omega) - 2\int cos(\omega) e^{\omega} d\omega$$

$$\Rightarrow I = 2e^{\omega} cos(\omega) + 2e^{\omega} sen(\omega) - I$$

$$\Rightarrow 2I = 2e^{\omega} cos(\omega) + 2e^{\omega} sen(\omega)$$

$$\Rightarrow I = e^{\omega} cos(\omega) + e^{\omega} sen(\omega) + C$$

$$\therefore \boxed{I = x\,cos\left(ln(x)\right) + x\,sen\left(ln(x)\right) + C}$$

b) Por descomposición en fracciones parciales

Sea $\dfrac{2x^3+10x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}$;

$$2x^3+10x=\left(x^2+1\right)\left(Ax+B\right)+\left(Cx+D\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} si\ \ x=0 \quad \Rightarrow \boxed{B+D=0} \\ si\ \ x=1 \quad \Rightarrow 12=2\left(A+B\right)+C+D \\ \qquad\qquad\qquad \boxed{12=2A+2B+C+D} \\ si\ \ x=-1 \quad \Rightarrow -12=2\left(-A+B\right)-C+D \\ \qquad\qquad\qquad \boxed{-12=-2A+2B-C+D} \\ si\ \ x=2 \quad \Rightarrow 36=5\left(2A+B\right)+2C+D \\ \qquad\qquad\qquad \boxed{36=10A+5B+2C+D} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} \boxed{B \qquad +D=0} \\ \boxed{2A+2B\ +C+D=12} \\ \boxed{-2A+2B\ -C+D=12} \\ \boxed{10A+5B+2C+D=36} \end{cases}$$

Obtenemos:

$A=2;\quad B=0;\quad C=8;\quad D=0$

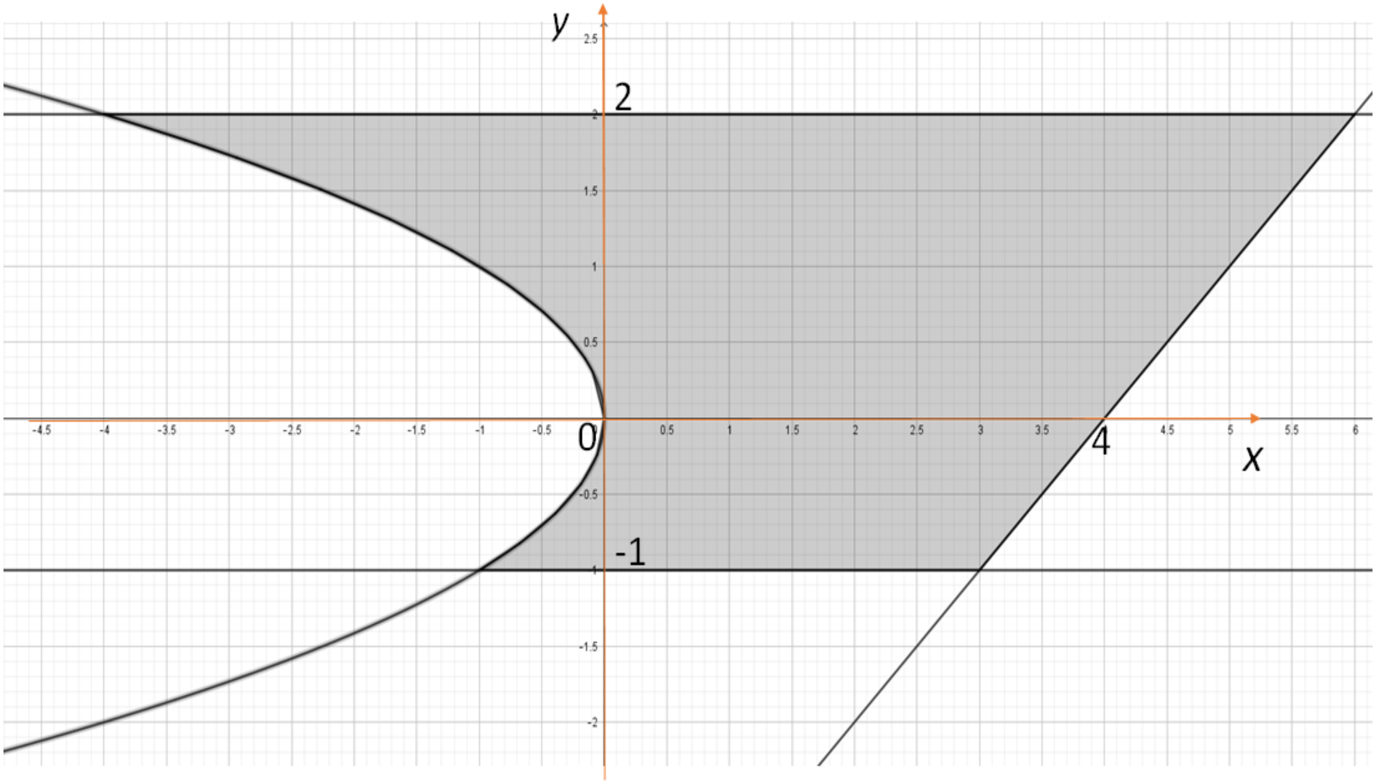
Entonces la integral queda:

$$I=\int\left[\frac{2x}{x^2+1}\right]dx+\int\left[\frac{8x}{\left(x^2+1\right)^2}\right]dx$$

$$\Rightarrow\boxed{I=ln\left(x^2+1\right)-\frac{4}{x^2+1}+C}$$

20 Puntos

4. La región es:



El área de la región es el resultado de calcular:

$$A = \int_{-1}^{2} \left[(y+4) - \left(-y^2\right) \right] dy$$

$$A = \left[\frac{y^2}{2} + 4y + \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^{2} = 2 + 8 + \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2} - 4 - \frac{1}{3} \right)$$

$$A = 10 + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{3} = 17 - \frac{1}{2} = \frac{34}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{33}{2} u^2}$$

15 Puntos

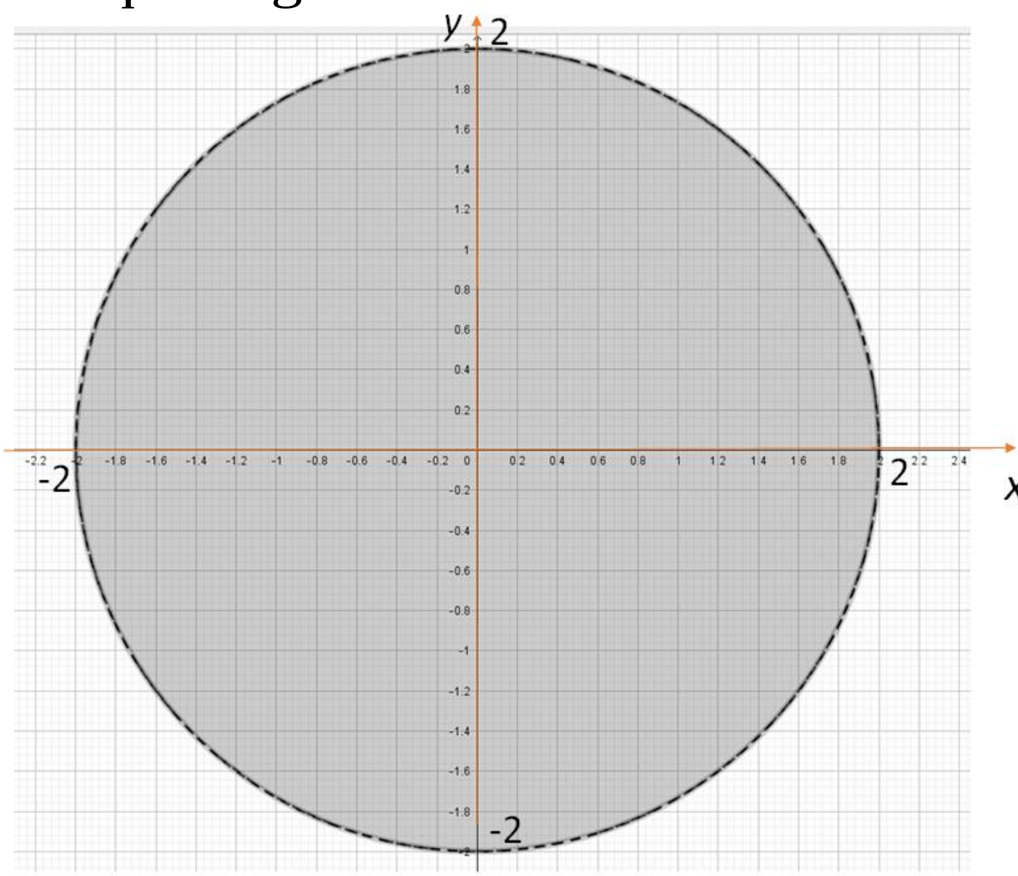
5.

a) Debe cumplirse que: $4 - x^2 - y^2 - 1 > 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 < 4$$

$$\therefore \quad \boxed{D_f = \left\{ (x,y) \middle| \; x^2 + y^2 < 4 \right\}}$$

b) Por lo que la gráfica del dominio es:



15 Puntos

6.

a) La dirección solicitada es la del vector gradiente:

Sea $\nabla f\big|_P = \sqrt{2}\hat{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$ *la dirección del vector*

b) La máxima variación es:

$$\left|\nabla f\right| = \sqrt{2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

20 Puntos