UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO
1221

Sinodales: M.E.M. Enrique Arenas Sánchez
Ing. Sergio Carlos Crail Corzas

Alumno:*____** ***Semestre 2018-1

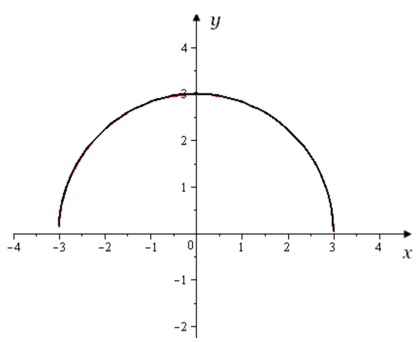
INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

1. Determina el intervalo de convergencia de la serie expresado por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n}$$

15 puntos

2. Determina el valor medio de la función cuya gráfica es



en el intervalo $[-3,3]$.

10 puntos

3. Determina si la siguiente integral converge o diverge.

$$\int_{-\infty}^{0} e^{e^x + x}\, dx$$

10 puntos

4. Efectúa

a) $a) \int \frac{x\, angsen(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ $\qquad b) \int \frac{x^3 - x + 3}{x^2 + x - 2}\, dx$ $\qquad c) \int e^x \sqrt{1-e^{2x}}\, dx$

30 puntos

5. Calcula la longitud de la curva dada por $x = e^{-t}\cos t,\quad y = e^{-t} sent$ en donde $t \in \left[0,\ ln 2\right]$

15 puntos

6. Calcula la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = e^x + senhy + \ln z$ en el punto $(0,0,1)$ y en la dirección del vector que forma un ángulo de $45°$ con el eje X, y de $60°$ con el eje Y.

20 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

Solución del Primer Examen Extraordinario

Semestre 2018 – 1

1. Determinar el intervalo de convergencia de la serie expresada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n}$$

Sea

$$r = \frac{\dfrac{(x+2)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\dfrac{(x+2)^n}{3^n}} = \frac{(x+2)^{n+1}\,3^n}{(x+2)^n\,3^{n+1}} = \frac{x+2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} r = \frac{x+2}{3} = \rho \quad si \quad |\rho| < 1, \text{ de donde}$$

$$-5 < \text{x} < 1$$

Análisis de los extremos

Si x=–5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

que es divergente, según el criterio de Leibniz

si $x = 1$

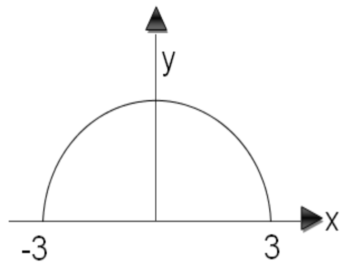
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

que es divergente

Por lo que el intervalo es $\boxed{-5 < x < -1}$

10 puntos

2. Determinar el valor medio de la función $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ en el intervalo $[-3,3]$



$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

$$f(c)=\frac{\int_{-3}^{3}\left(\sqrt{9-x^2}\right)dx}{3-(-3)}$$

$$f(c)=\frac{\frac{\pi(3)^2}{2}}{6}=\frac{\frac{9}{2}\pi}{6}=\frac{9}{12}\pi$$

$$f(c)=\frac{3}{4}\pi$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Re\,sultado \\ f(c)=\frac{3}{4}\pi \end{array}}$$

15 puntos

3. Determinar si la integeral converge o diverge $\int_{-\infty}^{0} e^{e^x+x}\,dx$

$$I=\int_{-\infty}^{0}(e^{e^x+x})dx=\lim_{b\to-\infty}\int_b^0(e^{e^x+x})dx$$

$$\int(e^{e^x}e^x)dx=\begin{pmatrix} u=e^x \\ du=e^x dx\end{pmatrix}=\int e^u du=e^{e^x}+C$$

$$I = \lim_{b\to -\infty} e^{e^{x}} \Big]_{b}^{0} = \lim_{b\to -\infty} e - e^{e^{b}} = e - 1 \qquad CONVERGE$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Respuesta \\ \text{La integral impropia converge} \end{array}}$$

10 puntos

---

4. Efectúa

$$a) \int \frac{x\, angsen(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = I$$

$$u = angsen(x) \qquad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad v = -\sqrt{1-x^2}$$

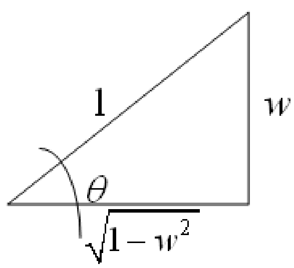
$$I = -\sqrt{1-x^2}\, angsen(x) + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\sqrt{1-x^2}\, angsen(x) + x + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Re}\, sultado \\ I = -\sqrt{1-x^2}\, angsen(x) + x + C \end{array}}$$

$$b)\int e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx = I$$ Cambio de variable y por sustitución trigonométrica

$$Si \quad w = e^{x} \rightarrow dw = e^{x}dx$$

$$I = \int \sqrt{1-w^{2}}\,dw$$



$$sen\theta = w$$

$$\cos\theta = \sqrt{1-w^{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{w}{\sqrt{1-w^{2}}}$$

$$dw = \cos\theta d\theta$$

$$I = \int \cos\theta\cos\theta d\theta = \int \cos^{2}\theta d\theta = \int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$I = \frac{\theta}{2}+\frac{sen2\theta}{4}+C = \frac{\theta}{2}+\frac{sen\theta\cos\theta}{2}+C$$

$$I = \frac{1}{2}angsen(e^{x})+\frac{e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}}{2}+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Re}\,sultado \\ I = \frac{1}{2}angsen(e^{x})+\frac{e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}}{2}+C\end{array}}$$

c) Se efectúa la división y quedan integrales inmediatas

$$\begin{array}{r|l} x^2+x-2 & \begin{array}{l} x-1 \\ \hline x^3+x^2-x+3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^3-x^2+x \\ \hline -x^2+x+3 \\ x^2+x-2 \\ \hline 2x+1 \end{array}$$

$$I = \int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\,dx = \int\left(x-1+\frac{2x+1}{x^2+x-2}\right)dx$$

$$I = \int x dx - \int dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x-2}dx$$

$$I = \frac{x^2}{2} - x + \ln\left|x^2+x-2\right| + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Resultado} \\ I = \dfrac{x^2}{2} - x + \ln\left|x^2+x-2\right| + C \end{array}}$$

30 puntos

5. Calcular la longitud de la curva dada por $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t} sent$ en donde $t \in \left[0,\ \ln 2\right]$

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t} sent - e^{-t}\cos t \qquad \frac{dy}{dt} = e^{-t}\cos t - e^{-t} sent$$

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}(sent + \cos t) \qquad \frac{dy}{dt} = e^{-t}(\cos t - sent)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = e^{-2t}(sent + \cos t)^2 + e^{-2t}(\cos t - sent)^2 = 2e^{-2t}$$

$$S = \int_0^{\ln 2} \sqrt{2e^{-2t}}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{\ln 2} e^{-t} dt = -\sqrt{2}\, e^{-t}\Big]_0^{\ln 2}$$

$$S = -\sqrt{2}\,(e^{-\ln 2} - 1) = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\text{Re}\,sultado$

$$S = \frac{\sqrt{2}}{2}\ unidades\, de\, longitud$$

6. Calcular la derivada direccional de la función $f\left(x,y,z\right)=e^{x}+senhy+\ln z$ en el punto $\left(0,0,1\right)$ y en la dirección del vector localizado en el primer octante que forma un ángulo de $45°$ con el eje X, y de $60°$ con el eje Y.

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0}=\nabla f\,(x_0,y_0,z_0)\bullet\bar{u}$$

$$\nabla f=\left(e^{x},\cosh y,\frac{1}{z}\right)\qquad\qquad \nabla f\,(0,0,1)=\left(1,1,1\right)$$

$$\bar{u}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\cos 45°,\cos 60°,\cos\gamma)$$

De la relación $\cos^{2}45°+\cos^{2}60°+\cos^{2}\gamma=1$

Se tiene que $\gamma=60°$ y $\gamma=120°$

Si $\gamma=60°$ (la que el alumno elija)

$$\bar{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{P_0}=(1,1,1)\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$$

$\mathrm{Re}\,sultado$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{P_0}=\boxed{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$$

Si $\gamma=120°$ (la que el alumno elija)

$$\bar{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{P_0}=(1,1,1)\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$\mathrm{Re}\,sultado$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{P_0}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

20 puntos