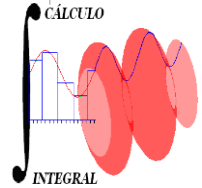


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS
CÁLCULO INTEGRAL



PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO
Sinodales: M.E.M. Margarita Ramírez Galindo
Ing. S. Carlos Crail Corzas

17 de marzo de 2017

1221

Semestre 2017-2

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

1. Escribir el número decimal periódico infinito $0.7777\dots$ como una serie y determinar su carácter. Si es convergente, calcular su suma.

15 Puntos

2. Calcular, si existe:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (1 - \cos x)^{\sec x}$$

15 Puntos

3. Efectuar las siguientes integrales:

$$a) \int \frac{x}{x^2 + x - 6} dx$$

$$b) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$$

$$c) \int \ln(x)^{2x} dx$$

30 Puntos

4. Calcular la longitud de la gráfica de la función en el $f(x) = \frac{4}{3} \sqrt{x^3}$ en el intervalo $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.

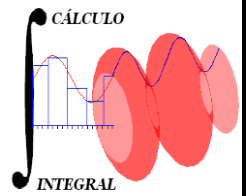
10 Puntos

5. Calcular $\frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} \Big|_{(\ln 2, 2)}$ de la función $g(x, y) = y e^x - x e^y$.

15 Puntos

6. Obtener la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y) = \sqrt{9 - y^2}$ en el punto $P(4, \sqrt{5}, 2)$.

15 Puntos



1.-

$$\text{Si } 0.77777\dots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots$$

entonces el número puede ser expresado como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

que es una serie geométrica donde $r = \frac{1}{10} < 1$

por lo tanto converge y la suma es:

$$S = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \boxed{\frac{7}{9}}$$

15 puntos

2.-

Si reescribimos la función como

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (1 - \cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = 1^\infty, \quad \text{sea}$$

$$y = (1 - \cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{\ln(1 - \cos x)}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \ln y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\cos x} = \frac{0}{0} \text{ al aplicar L'Hôpital}$$

$$\ln \left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} y \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \left[\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}}{-\operatorname{sen} x} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \left[\frac{-1}{1 - \cos x} \right] = -1$$

por lo tanto

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} (1 - \cos x)^{\sec x} = \frac{1}{e}}$$

15 puntos

3. a) Por fracciones parciales:

$$\frac{x}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}, \text{ entonces}$$

$$x = A(x+3) + B(x-2)$$

$$\text{si } x = -3 \qquad \text{si } x = 2$$

$$-3 = -5B$$

$$2 = 5A$$

$$\boxed{B = \frac{3}{5}}$$

$$\boxed{A = \frac{2}{5}}$$

Por lo que la integral queda

$$I = \int \left(\frac{x}{x^2 + x - 6} \right) dx = \frac{2}{5} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x+3}$$

$$I = \frac{2}{5} \ln(x-2) + \frac{3}{5} \ln(x+3) + C$$

$$\boxed{I = \ln \sqrt[5]{(x-2)^2 (x+3)^3} + C}$$

1.

b) Es de la forma $\int u^n du$:

$$\int (1 - e^{2x})^{-\frac{1}{2}} e^{2x} dx = -\frac{1}{2} \int (1 - e^{2x})^{-\frac{1}{2}} (-2e^{2x} dx) = \boxed{-\sqrt{1 - e^{2x}} + C}$$

c) Por partes

$$\int \ln x^{2x} dx = \int 2x \ln x dx$$

$$u = 2 \ln x \quad dv = x$$

$$du = \frac{2}{x} dx \quad v = \frac{1}{2} x^2$$

$$I = x^2 \ln x - \int x dx$$

$$\boxed{I = x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + C}$$

30 puntos

4.-

Sea

$$f'(x) = 2\sqrt{x} \Rightarrow [f'(x)]^2 = 4x$$

$$L = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+4x} dx = \frac{1}{6} \sqrt{(1+4x)^3} \Big|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{6} [\sqrt{8} - 1]$$

$$\boxed{L = \frac{1}{6} (2\sqrt{2} - 1) u}$$

10 puntos

5.

$$\text{Si } z = ye^x - xe^y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = e^x - xe^y, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^x - e^y, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = e^x$$

$$\therefore \boxed{\left. \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} \right|_{(\ln 2, 2)} = e^{\ln 2} = 2}$$

15 puntos

6.

La ecuación tiene la forma

$$(x-a) \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_p + (y-b) \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_p + (z-c) \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_p = 0$$

$$\text{Si } P(4, \sqrt{5}, 2) \text{ y } f(x, y) = \sqrt{9 - y^2}$$

$$\Rightarrow F(x, y, z) = \sqrt{9 - y^2} - z$$

$$(x-4)(0) + (y-\sqrt{5}) \frac{-y}{\sqrt{9-y^2}} + (z-2)(-1) = 0$$

$$(y-\sqrt{5}) \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} \right) + 2 - z = 0$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{2} y + \frac{5}{2} + 2 - z = 0, \text{ por lo que}$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{2} y - z + \frac{9}{2} = 0, \boxed{-\sqrt{5} y - 2z + 9 = 0}$$

15 puntos