UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO

1221

Sinodales: ***Ing. Luis Hernández Moreno***
Ing. Sergio Carlos Crail Corzas

22 de septiembre de 2016 ***Semestre 2017-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Obtener la serie de Maclaurin de la función:

$$g(x) = -\ln(1-x)$$

15 puntos

---

2. . Sea la función

$$g(x) = 2 + \operatorname{sen} x$$

definida en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Calcular el valor medio de la función en el intervalo dado y determinar el valor de C que se encuentra en dicho intervalo para el cual se cumple el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

15 puntos

3. Determine

$$a)\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx \qquad\qquad b)\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$$

20 Puntos

---

3. Calcular el área de la región del plano cartesiano limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4$, el eje de las abscisas y las rectas $x=-1$, $x=3$

15 Puntos

---

5. Obtener la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie $x^2+y^2+z^2=169$, en el punto de coordenadas $P(12,-4,3)$

15 Puntos

---

6. Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y,z)=\dfrac{x^2 y}{z}$ en el punto $Q(2,-1,1)$ y en la dirección del vector $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, del cual se sabe que sus ángulos directores son: $\alpha=45^o$, $\beta=60^o$, $\gamma\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

20 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
CÁLCULO INTEGRAL
1221
Solución del Primer Examen Extraordinario
Semestre 2017 – 1

1.

Si $g(x) = -\ln(1-x)$

$$g'(x) = -\frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$g''(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow g^n(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \Rightarrow g^n(c) = (n-1)!$$

Sea la serie de Maclaurin

$$\ln(1-x) = g(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n(0)}{n!} x^n \qquad \text{pero} \quad g^n(0) = (n-1)!$$

$$\ln(1-x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} x^n$$

$$\boxed{-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}}$$

15 puntos

2.

Si el valor medio

$$g(c)=\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2+senx)\,dx}{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2x-\cos x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\,dx}{\pi}$$

$$g(c)=\frac{\pi-(0)-[-\pi-(0)]}{\pi}=\frac{2\pi}{\pi}=2$$

sea $2+sen\,c=2 \Rightarrow \boxed{c=0}$

15 puntos

3. a) Por fracciones parciales

Sea la fracción:

$$\frac{x+3}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}\ ,\quad \text{entonces}$$

$$x+3=A(x-2)+B(x-1)$$

$si \quad x=2 \qquad\qquad si \quad x=1$

$\Rightarrow \boxed{5=B} \qquad\qquad \Rightarrow \boxed{A=-4}$

Por lo que la integral queda

$$I=\int\frac{-4}{x-1}dx+\int\frac{5}{x-2}dx$$

$$I=-4\ln(x-1)+5\ln(x-2)+c$$

$$\boxed{I=\ln\frac{(x-2)^5}{(x-1)^4}+c}$$

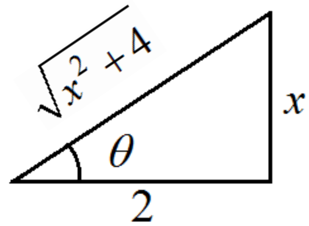
10 puntos

10 puntos

b) Por sustitución trigonométrica

$x = 2\,tan\,\theta$

$\sqrt{x^2+4} = 2\,sec\,\theta$



Entonces $I = \frac{1}{4}\int \frac{2\,sec^2\,\theta}{tan^2\,\theta\;2\,sec\,\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{sec\,\theta}{tan^2\,\theta}\,d\theta$

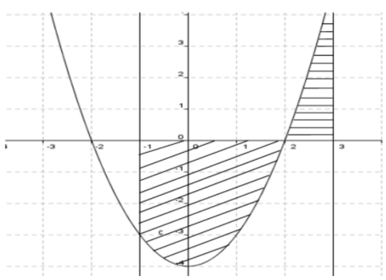
$$I = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{cos\,\theta}}{\frac{sen^2\theta}{cos^2\,\theta}}\,dx = \frac{1}{4}\int sen^{-2}\theta\left(cos\,\theta\right)d\theta$$

$$I = \frac{1}{4}\,\frac{sen^{-1}\theta}{-1} + c = \frac{-1}{4sen\theta} + c = -\frac{1}{4}csc\,\theta + c$$

$$\boxed{I = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4\,x} + c}$$

10 puntos

4. Sea la región



Entonces el área es

$$A = \left|\int_{-1}^{2}(x^2-4)dx\right| + \int_{2}^{3}(x^2-4)dx = \left|\;\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-1}^{2}\left| + \;\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{2}^{3}$$

$$A = \left|\frac{2^3}{3} - 4(2) - \left(-\frac{1}{3} + 4\right)\right| + \left[\frac{3^3}{3} - 4\left(3\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 4\left(2\right)\right)\right]$$

$$A = \left|\frac{8}{3} - 8 + \frac{1}{3} - 4\right| + 3^2 - 12 - \frac{8}{3} + 8$$

$$A = |3-12| + 17 - 12 - \frac{8}{3} = |-9| + 5 - \frac{8}{3}$$

$$A = 14 - \frac{8}{3} = \frac{42}{3} - \frac{8}{3} = \boxed{\frac{34}{3} u^2}$$

15 puntos

---

5. Sean

$$F(x, y, z) = 0 \qquad y \qquad P(12, -4, 3)$$

$$F = x^2 + y^2 + z^2 - 169 \implies \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

evaluadas en P se obtienen: $\quad a = 24 \quad b = -8 \quad c = 6$

la ecuación quedará

$$24(x-12) + (-8)(y-(-4)) + 6(z-3) = 0$$

$24x - 288 - 8y - 32 + 6z - 18 = 0,$ finalmente

$$\boxed{24x - 8y + 6z = 338} \quad \text{ó} \quad \boxed{12x - 4y + 3z = 169}$$

15 puntos

6. Para la dirección se tiene que debe cumplirse

$$\cos^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2 \gamma = 1 \quad \text{de donde}$$

$$\cos^2 \gamma = 1 - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} \implies \cos^2 \gamma = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}\ , \quad \text{como} \quad \gamma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{entonces } \gamma > 0$$

$$\therefore \quad \gamma = \arg\cos\frac{1}{2} = 60^\circ$$

Sea la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial s} = \overline{\nabla} f \bullet .\bar{u}_u$ y si

$$\overline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \implies \overline{\nabla} f = \frac{2xy}{z} i + \frac{x^2}{z} j - \frac{x^2 y}{z^2} k$$

$$\text{y } \bar{u}_u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad \overline{\nabla} f\Big|_p = (-4,\ 4,\ 4)$$

$$\frac{d\ f}{d\ s} = (-4, 4, 4) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \boxed{4 - 2\sqrt{2}}$$

20 puntos