UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO

***Sinodales:* Ing. Sergio Carlos Crail Corzas**
M.I. Mayverena Jurado Pineda

25 de septiembre de 2015 ***Semestre 2016-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Si el valor medio de la función f en el intervalo $[a,\ \pi]$ es 0, entonces calcular el valor de a.

$$f\,(x) = -\,sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

15 Puntos

---

2. Calcular, si existe:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(e^x + 2x\right)^{\frac{3}{x}}$$

15 Puntos

3. Efectuar las integrales:

$$a)\ \int 2x\,\text{angtan}\,x\,dx \qquad b)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad c)\ \int \frac{dx}{x^3-x^2}$$

30 Puntos

---

4. Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar alrededor del eje de las ordenadas a región limitada por las gráficas de:

$$y^2 - x - 1 = 0\ , \qquad x = 0 \qquad \text{y} \qquad y = 0$$

10 Puntos

---

5. Obtener $\left.\dfrac{\partial w}{\partial s}\right|_{\substack{s=0\\ t=1}}$, en donde

$$w(x,y) = y^3 - 3x^2y \quad , \quad x = 4 - e^s \quad \text{y} \quad y = 5e^t$$

15 Puntos

---

6. La temperatura de una placa metálica en el punto (x,y) está dada por

$$T(x,y) = 400\,e^{\frac{-(x^2+y)}{2}} \quad , \qquad x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0$$

Determinar, a partir del punto $P(3,5)$ la dirección en la cual aumenta más rápido la temperatura.

15 Puntos

1. Sea

$$f(c) = \frac{\int_a^{\pi} \left[-\,sen\left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right] dx}{\pi - a} = 0 \ ;$$

Sabiendo que $-\,sen\left(x - \frac{\pi}{2} \right) = cos\,x$, entonces

$$f(c) = \frac{\int_a^{\pi} cos\,x\,dx}{\pi - a} = 0$$

$$sen(x) \Big]_a^{\pi} = 0 \ ; \quad sen\,\pi - sen\,a = 0$$

$$a = angsen\,(0) \quad \therefore \quad \boxed{a = 0}$$

15 Puntos

2. La sustitución directa da

$$L = (1)^{\infty}$$

Sea $\quad y = \left(e^x + 2x \right)^{\frac{3}{x}} \quad$ entonces

$$\ln y = \ln \left(e^x + 2x \right)^{\frac{3}{x}} \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \left[\frac{3}{x} \ln \left(e^x + 2x \right) \right] = \frac{0}{0} \quad \text{Aplicando L'Hopital}$$

$$\ln \lim_{x \to 0} y = 3 \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x + 2}{e^x + 2x}}{1} = 3 \lim_{x \to 0} \frac{e^x + 2}{e^x + 2x} = 9 \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(e^x + 2x \right)^{\frac{3}{x}} = e^9 \quad \therefore \quad \boxed{L = e^9}$$

15 Puntos

3.

a) Por partes

$$I = \int 2x \, ang\tan x \, dx$$

$$si \quad u = ang\tan x \qquad dv = 2x\,dx$$

$$du = \frac{1}{1+x}dx \qquad v = x^2$$

$$I = x^2 ang\tan x - \int \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right) dx$$

$$I = x^2 ang\tan x - \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

$$I = x^2 ang\tan x - x + ang\tan x + C$$

$$\boxed{I = \left(x^2 + 1 \right) ang\tan x - x + C}$$

10 Puntos

b) Por sustitución trigonométrica

$$si \qquad x = sen\,\theta$$

$$\sqrt{1-x^2} = \cos\theta$$

$$dx = \cos\theta \, d\theta \qquad \text{entonces}$$

$$\int \left(\frac{\cos\theta}{sen\,\theta \cos\theta} \right) d\theta = \int \frac{d\theta}{sen\,\theta} = \int \csc\theta \, d\theta$$

$$I = ln \left| \csc\theta - \cot\theta \right| + C$$

$$I = ln \left| \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C$$

$$\boxed{I = ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C}$$

10 Puntos

c) Por fracciones parciales

$$\int \frac{d\,x}{x^3 - x^2} = \int \frac{d\,x}{x^2\,(x-1)}$$

$$\frac{1}{x^2\,(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-1)}$$

$$1 = A\,x\,(x-1) + B\,(x-1) + C\,x^2$$

$$si \quad x = 0 \qquad\qquad si \quad x = 1 \qquad\qquad si \quad x = 2$$

$$B = -1 \qquad\qquad C = 1 \qquad\qquad A = -1$$

$$\int \frac{dx}{x^2\,(x-1)} = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)} \right) dx$$

$$I = -\,ln\,x - \frac{1}{x} + ln\,(x-1) + c$$

$$I = ln\left(\frac{x-1}{x} \right) + \frac{1}{x} + c$$

$$\boxed{I = ln\left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x} + c}$$

10 Puntos

4. El volumen se puede calcular con:

$$V = \pi \int_0^1 \left(y^2 - 1 \right)^2 d\,y$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(y^2 - 1 \right)^2 d\,y = \pi \int_0^1 \left(y^4 - 2\,y^2 + 1 \right) d\,y$$

$$V = \pi \left(\frac{y^5}{5} - \frac{2}{3} y^3 + y \right)_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right)$$

$$\boxed{V = \frac{8}{15} \pi \;\; u^3}$$

10 Puntos

5. Se tiene que

$$w(x,y)=y^3-3x^2y\ , \qquad x=4-e^s\ , \quad y=5e^t$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-6xy \qquad\qquad \frac{\partial x}{\partial s}=-e^s$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=3y^2-3x^2 \qquad\qquad \frac{\partial y}{\partial s}=0$$

$$Para \qquad s=0, \quad t=1$$

$$x=3, \quad y=5e$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{\substack{s=0\\t=1}}=6xye^s=6(3)(5e)=90e \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{\substack{s=0\\t=1}}=90e}$$

15 Puntos

---

6. Para obtener la dirección de máxima temperatura, se tiene

$$T(x,y)=400e^{\frac{-(x^2+y)}{2}}$$

$$\nabla T=\frac{\partial T}{\partial x}i+\frac{\partial T}{\partial y}j$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{P(3,5)}=400(-x)e^{\frac{-(x^2+y)}{2}}=-1200e^{-7}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{P(3,5)}=400\left(-\ \frac{1}{2}\right)e^{\frac{-(x^2+y)}{2}}=-200e^{-7}$$

$$\nabla T(3,5)=\left(-1200e^{-7}\right)i+\left(-200e^{-7}\right)j$$

15 Puntos