INICIO

Elaborado por: Enrique Arenas Sánchez

Introducción del editor:

¿Que es la visualización matemática?

Walter Zimmerman and Steve Cunningham:

En el prefacio a la "Geometría y la Imaginación", Hilbert escribió:

"En matemáticas... encontramos dos tendencias presentes. Por un lado la tendencia a la abstracción busca cristalizar las relaciones lógicas inherentes a la masa de material que está siendo estudiada y correlaciona el material de una manera sistemática y ordenada. Por otro lado, la tendencia hacia un entendimiento intuitivo fomenta una mayor comprensión de los objetos en estudio, un entendimiento vivo, para hablar, los cuales recalcan los significados escritos de sus relaciones".

David y Anderson (en el artículo citado anteriormente) describen éste proceso con la frase llena de color, "La degradación de la ciencia geométrica". Ellos observan que "...**hace un siglo y medio hubo una firme y progresiva degradación de los elementos geométricos y cinestesicos de instrucción matemática e investigación. Durante este período los elementos formales, los simbólicos**, los verbales y los analíticos han prosperado grandemente."

Se designa por s_k el valor constante que toma s en el subintervalo abierto k-ésimo, de manera que:

$$s(x) = s_k \quad \text{si} \quad x_{k-1} < x < x_k\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE FUNCIONES ESCALONADAS. *La integral de de a a b, que se designa por el símbolo $\int_a^b s(x)\,dx$, se define mediante la siguiente fórmula:*

(1.3)
$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot (x_k - x_{k-1})\,.$$

VI.3 TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO INTEGRAL

TEOREMA VI.9

Hipótesis:

$y = f(x)$ es continua en $[a, b]$, m es el mínimo absoluto que ocurre en x_m, M es el máximo absoluto que ocurre en x_M

Es decir:

$$f(x_m) = m \qquad a \leq x_m \leq b \qquad \ldots (16)$$

$$f(x_M) = M \qquad a \leq x_M \leq b \qquad \ldots (17)$$

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall\ x \in [a, b]$$

Tesis:

Existe un número $x_0 \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(x_0)\,(b - a); \qquad a \leq x_0 \leq b$$

$$m \leq f(x_0) \leq M$$

Demostración:

Por el teorema VI.8:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b - a)$$

dado que $b - a \neq 0$, se puede dividir entre ese valor:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\ dx}{b - a} \leq M$$

de las expresiones (16) y (17), se tiene:

$$f(x_m) \leq \frac{\int_a^b f(x)\ dx}{b - a} \leq f(x_M) \qquad \ldots (18)$$

Tomando en cuenta en esta última expresión (18) el teorema de Bolzano visto en el capítulo IV, se sabe que existe un número $x_o \in [a, b]$ de tal manera que:

$$f(x_o) = \frac{\int_a^b f(x)\ dx}{b - a}$$

despejando:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = f(x_o)(b - a);\ a \leq x_o \leq b} \qquad \text{Q.D.}$$

EL PROMEDIO

El cálculo del promedio de una lista de valores

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots, a_n]$$

normalmente se calcula mediante la conocida expresión:

$$a_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \qquad \text{..........(1)}$$

Una forma general para calcular el promedio de una lista de valores es considerar que cada valor tiene un cierto peso o ponderación, así la expresión a utilizar para el cálculo del promedio es

$$a_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \qquad \text{...............(2)}$$

donde p_i es la ponderación del valor a_i .

Así podemos ver al valor promedio de los valores de una lista como el cociente de dos sumas, el numerador es la **suma de los valores ponderados**

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i$$

y el denominador como la **suma de las ponderaciones** de los valores de la lista.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i$$

si se considera que todas las ponderaciones son unitarias, es decir $p_i = 1$, es fácil verificar que la expresión (1) es un caso particular de la expresión (2).

$$a_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (1) a_i}{\sum_{i=1}^{n} (1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

Ejemplos:

Calcular el promedio de la siguiente lista de valores

$$[5,8,9,6,5,8,5,6]$$

a partir de la expresión (1).

$$a_m = \frac{\sum_{i=1}^{8} a_i}{8} = \frac{5+8+9+6+5+8+5+6}{8} = \frac{52}{8} = 6.5$$

Calcular el promedio de la siguiente lista de valores

$$[5,8,9,6,5,8,5,6]$$

con la ponderación determinada por la repetición de los valores de la lista.

La suma de los valores ponderados es

$$\sum_{i=1}^{4} p_i a_i = (3)5 + (2)6 + (2)8 + (1)9 = 52$$

La suma de las ponderaciones es

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 3 + 2 + 2 + 1 = 8$$

y finalmente el valor promedio de la lista de valores es

$$a_m = \frac{\sum_{i=1}^{4} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{4} p_i} = \frac{(3)5 + (2)6 + (2)8 + (1)9}{3 + 2 + 2 + 1} = \frac{52}{8} = 6.5$$

Calcular el promedio de la siguiente lista de valores

$$[5,8,9,6,5,8,5,6]$$

con ponderación $p_i = \frac{1}{3}$.

La suma de los valores ponderados es

$$\sum_{i=1}^{8} p_i a_i = \left(\frac{1}{3}\right)5 + \left(\frac{1}{3}\right)8 + \left(\frac{1}{3}\right)9 + \left(\frac{1}{3}\right)6 + \left(\frac{1}{3}\right)5 + \left(\frac{1}{3}\right)8 + \left(\frac{1}{3}\right)5 + \left(\frac{1}{3}\right)6 = \frac{52}{3}$$

La suma de las ponderaciones es

$$\sum_{i=1}^{8} p_i = \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

y finalmente el valor promedio de la lista de valores es

$$a_m = \frac{\sum_{i=1}^{8} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{8} p_i} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)5 + \left(\frac{1}{3}\right)8 + \left(\frac{1}{3}\right)9 + \left(\frac{1}{3}\right)6 + \left(\frac{1}{3}\right)5 + \left(\frac{1}{3}\right)8 + \left(\frac{1}{3}\right)5 + \left(\frac{1}{3}\right)6}{\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\left(\frac{52}{3}\right)}{\left(\frac{8}{3}\right)} = \frac{52}{8} = 6.5$$

Conclusiones:

- Al analizar los resultados obtenidos en el proceso de solución de los ejemplos, observamos que:

a) la suma de los valores ponderados, y la suma de las ponderaciones utilizadas depende de los valores de las ponderaciones.

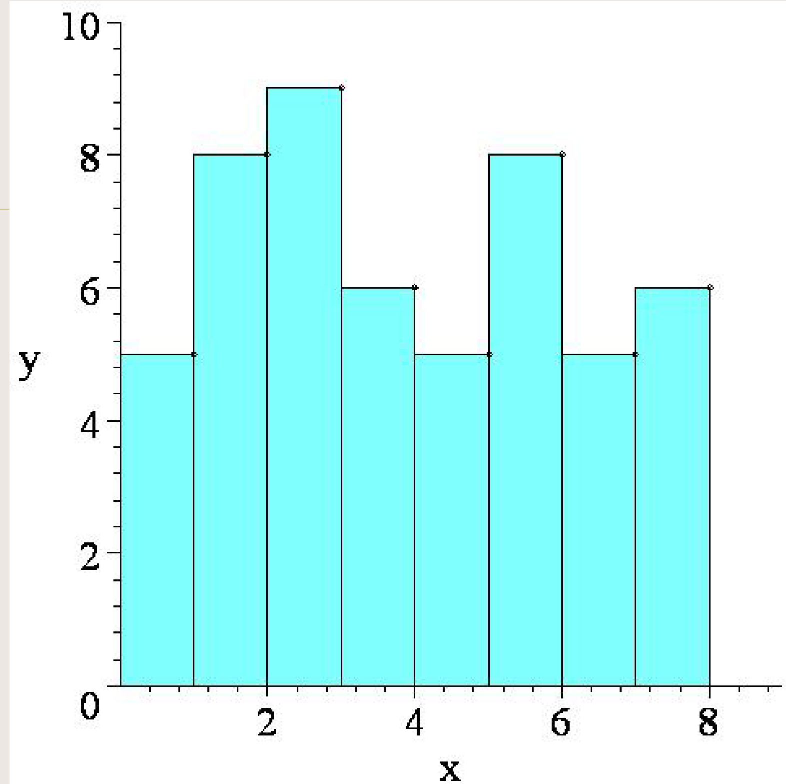
b) el valor promedio de los valores de la lista siempre es el mismo e independiente del valor de la ponderación que se emplee.

UNA REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

Para analizar este problema desde un punto de vista diferente, asignemos una representación geométrica a los resultados obtenidos en el desarrollo anterior.

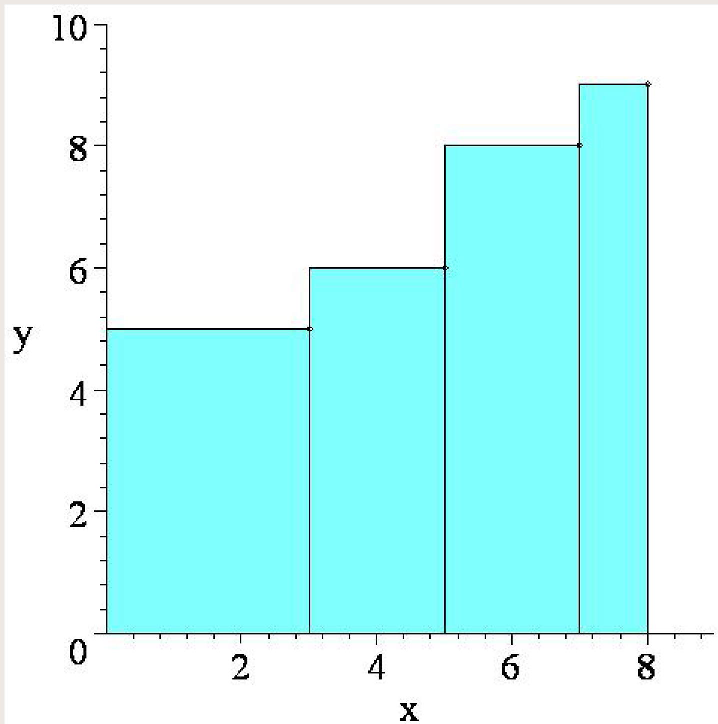
Consideremos un conjunto de rectángulos donde cada uno de ellos tiene por altura uno de los valores de la lista y como longitud de su base el valor de la ponderación asociada al respectivo valor de la lista.

De este modo: si consideramos el caso en el que $p_i = 1$



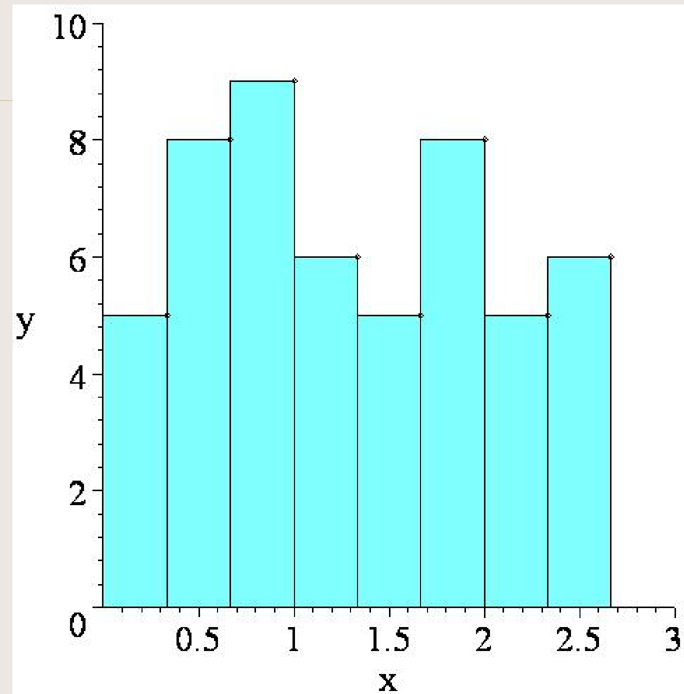
$$a_m = \frac{\sum_{i=1}^{8} a_i}{8} = \frac{5+8+9+6+5+8+5+6}{8} = \frac{52}{8} = 6.5$$

Cuando las ponderaciones son determinadas por la repetición de los valores de la lista



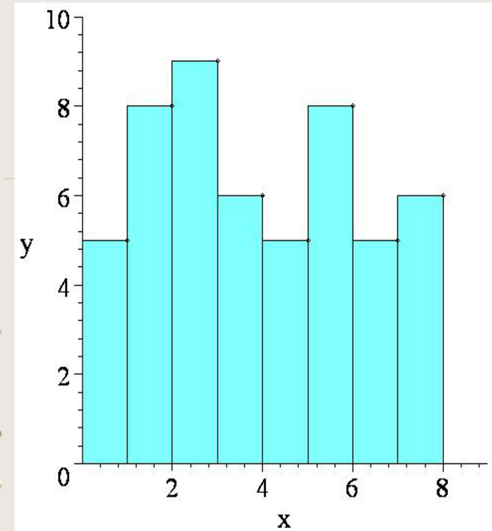
$$a_m = \frac{\sum_{i=1}^{4} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{4} p_i} = \frac{(3)5+(2)6+(2)8+(1)9}{3+2+2+1} = \frac{52}{8} = 6.5$$

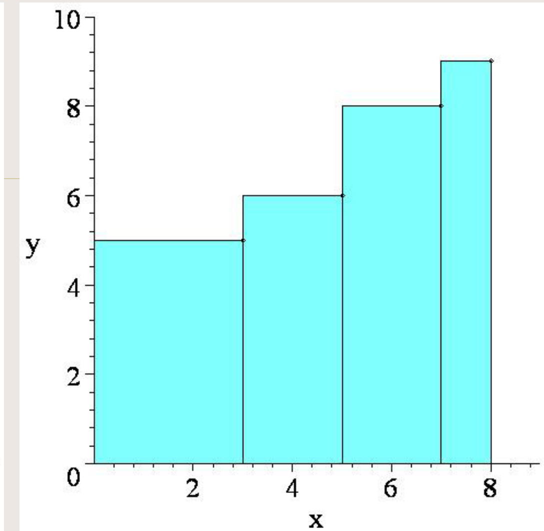
Si las ponderaciones son tales que $p_i = \frac{1}{3}$

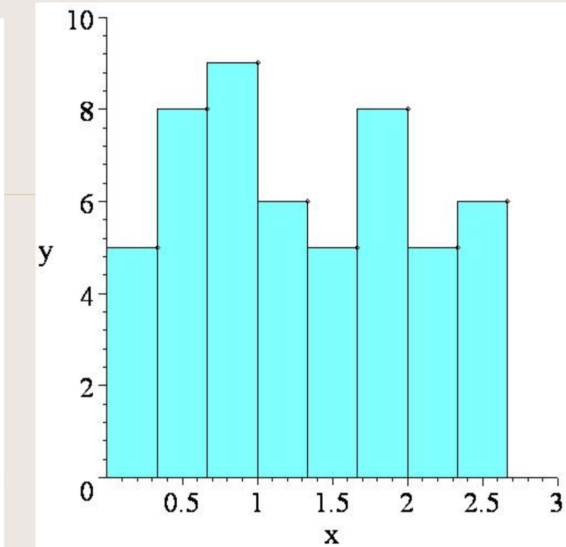


$$a_m = \frac{\sum_{i=1}^{8} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{8} p_i} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)5 + \left(\frac{1}{3}\right)8 + \left(\frac{1}{3}\right)9 + \left(\frac{1}{3}\right)6 + \left(\frac{1}{3}\right)5 + \left(\frac{1}{3}\right)8 + \left(\frac{1}{3}\right)5 + \left(\frac{1}{3}\right)6}{\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\left(\frac{52}{3}\right)}{\left(\frac{8}{3}\right)} = \frac{52}{8} = 6.5$$

$$[5,8,9,6,5,8,5,6]$$







$$a_m = \frac{\sum_{i=1}^{8} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{8} p_i} = \frac{(52)}{(8)} = 6.5 \qquad a_m = \frac{\sum_{i=1}^{8} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{8} p_i} = \frac{(52)}{(8)} = 6.5 \qquad a_m = \frac{\sum_{i=1}^{8} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{8} p_i} = \frac{\left(\frac{52}{3}\right)}{\left(\frac{8}{3}\right)} = 6.5$$

Conclusiones:

-La suma de los valores ponderados es igual área total de los rectángulos.

-La suma de las ponderaciones es igual a la longitud total de las bases de los rectángulos.

¿Qué ocurrirá en la representación gráfica si el número de los valores de la lista aumenta?

En tal caso:

¿Aumentará el valor de la suma de los valores ponderados?

¿Aumentará el valor de la suma de las ponderaciones?

Ahora, si el número de valores en la lista aumenta infinitamente

¿Qué ocurre con la suma de los valores ponderados? $\sum_{i=1}^{n} p_i a_i$

-La lista de valores se representa mediante una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$

-La ponderación debe disminuir, debe tender a cero llegando hasta el límite de modo que la suma de valores ponderados converja y esté definida. Simbólicamente $\lim_{p_i \to 0} (p_i) = dx$

- Al hacer tender a cero las ponderaciones se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

$$\lim_{p_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} a_i p_i = \lim_{\Delta_i x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x = \int_a^b f(x)dx$$

- De este modo se tiene que el promedio a_m esta dado por

$$a_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_a^b dx} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c)$$

Finalmente podemos decir que:

-El valor de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ representa "***la suma del infinito número de valores ponderados por el diferencial*** dx***, que define la función*** $f(x)$ ***en el intervalo*** $[a, b]$ ".

-El valor medio de una función $f(x)$ es igual al "***promedio del infinito número de valores que define la función*** $f(x)$ ***en el intervalo*** $[a, b]$ ".

Por su paciencia y atención

Gracias

Elaborado por: Enrique Arenas Sánchez