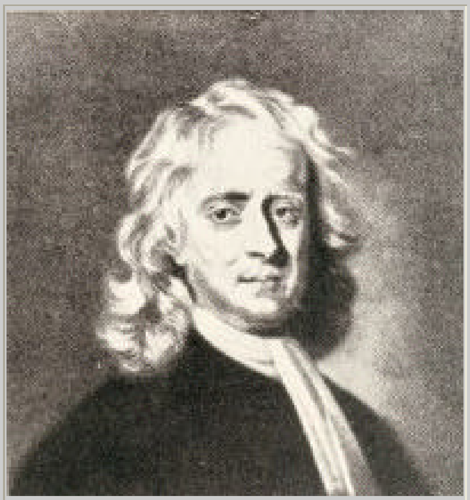
EL DESCUBRIMIENTO DEL CÁLCULO



Isaac Newton

G. W. Leibniz

1. Introducción

Isaac Newton (1642-1727) nació el 25 de Diciembre de 1642 según el calendario Juliano, todavía usado por entonces en Inglaterra, o el 4 de Enero de 1643 con respecto a nuestro calendario Gregoriano. Fue profesor de matemáticas en Cambridge y luego jefe de la casa de la moneda en Londres. Sus principales ideas fueron desarrolladas en 1664-1666 cuando estaba recluido en su casa natal de la aldea de Woolsthorpe, ya que el Trinity College de Cambridge, donde Newton era estudiante, estuvo cerrado por la epidemia de la peste. Allí desarrolló sus ideas de la gravitación universal, de la teoría de los colores y sobre la serie del binomio y el cálculo de fluxiones.

De naturaleza entonces tímida era reacio a publicar sus resultados, para así evitar las posibles críticas y controversias de sus contemporáneos. En Octubre de 1666 escribió un tratado sobre fluxiones y en 1669 *De analysi*, un tratado sobre series infinitas que circuló en forma de manuscrito entre los miembros de la Royal Society. Hay otro tratado sobre fluxiones y series infinitas de 1671 y otro sobre la cuadratura de curvas de 1693.

Sin embargo estos fueron publicados hasta bien tarde y algunos sólo lo fueron después de su muerte. *De analysi* fue publicado en 1711 y el tratado sobre cuadratura de curvas, *De Quadratura Curvarum* de 1693 apareció como un apéndice de su *Opticks* en de 1704. Su obra más famosa, donde expone su teoría de la gravitación universal, los *Principia,* fue publicada en 1687, pero sus argumentos son muy geométricos y sólo dan una idea de sus métodos del cálculo infinitesimal.

De entre el trabajo matemático de Newton, profundo y poderoso, se pueden distinguir algunos temas centrales. Estos son los desarrollos en serie de potencias, en especial el desarrollo del binomio, algoritmos para hallar raíces de ecuaciones y de inversión de series, relación inversa entre diferenciación e integración y el concepto de fluentes y fluxiones como variables que cambian en el tiempo. Newton estuvo muy interesado también en óptica, dinámica, alquimia, cronología de la historia y en la interpretación de las sagradas escrituras.

Gotfried Wilhem Leibniz (1646-1716) era hijo del vice-presidente de la facultad de filosofía de la universidad de Leipzig. De joven, estudió filosofía, derecho y lenguas clásicas. Su principal interés estuvo centrado en desarrollar una especie de lenguaje simbólico para representar los conceptos fundamentales del pensamiento humano y las maneras de combinar estos símbolos para llegar a conceptos más elaborados. Esta idea filosófica, que tiene relación con la combinatoria, fue ya algo en parte elaborada por franciscano mallorquín Ramón Llull (1235-1316) en su *Arte Luliano*.

Poco después de acabar sus estudios, Leibniz empezó en 1672 una misión diplomática en Paris donde permanecería unos cuatro años hasta 1676. Allí conoció a numerosos filósofos y miembros de la alta sociedad, en particular al holandés C. Huygens (1629-1695), entonces miembro de la recién creada *Académie Royale des Sciences*. Como curiosidad Huygens le planteó a Leibniz que hallara la suma de los inversos de los números triangulares. Mediante sumas y diferencias Leibniz fue capaz de hallar la suma de esta serie y entonces creció su interés en estudiar matemáticas, cuya formación hasta entonces había sido muy escasa. Huygens le recomendó que leyera la renovada edición en latín de van Schooten de la *Géometrie* de Descartes y los trabajos de Pascal. La entrada matemática de Leibniz fue entonces impresionante, ya que le llevó al descubrimiento del cálculo en 1675 y su elaboración y publicación en dos cortos artículos del *Acta Eruditorum* después en 1684 y 1686, el primero sobre cálculo diferencial y el segundo sobre cálculo integral.

El trabajo de Leibniz se conoce principalmente por los numerosos artículos que publicó en *Acta* y por sus cartas personales y manuscritos que se conservan en Hannover. Entre estos documentos están los manuscritos fechados el 25, 26 y 29 de Octubre y el 1 y 11 de Noviembre de 1675 donde Leibniz estudia la cuadratura de curvas y desarrolla su cálculo diferencial e integral.

Uno de los ingredientes fundamentales del cálculo de Leibniz son las reglas para la manipulación de los símbolos "$\int$" y "d" de la integral y la diferencial. Esto refleja sus ideas filosóficas de buscar un lenguaje simbólico y operacional para representar los conceptos e ideas del pensamiento de tal manera que los razonamientos y argumentos se puedan escribir por símbolos y fórmulas. En matemáticas su cálculo es en parte esto, un algoritmo para escribir los métodos geométricos de cuadraturas y tangentes por medio de símbolos y fórmulas. Las otras dos ideas fundamentales del cálculo de Leibniz son la relación entre la sumas de sucesiones con las diferencias de sus términos consecutivos y el llamado triángulo característico.

Leibniz pasó la mayor parte del resto de su vida en Alemania, como consejero del duque de Hannover. Aparte de la invención y del desarrollo de su cálculo y en la solución de problemas geométricos y de ecuaciones diferenciales, Leibniz tiene otros trabajos en solvabilidad de ecuaciones y determinantes y escribió y contribuyó enormemente en prácticamente todos los campos del conocimiento humano, religión, política, historia, física, mecánica, tecnología, lógica, geología, lingüística e historia natural.

Aunque oscuros y difíciles de leer, los dos artículos de *Acta* de Leibniz de 1684 y 1686 fueron leídos por los hermanos Jakob y Johann Bernoulli. Jakob Bernoulli era profesor de matemáticas en Basilea y su hermano Johann, unos trece años más joven, le sucedió después en 1705. Ambos entendieron notablemente el simbolismo y los conceptos de Leibniz y publicaron varios artículos en *Acta* a partir de 1690. Después iniciaron una intensa y productiva correspondencia con Leibniz, resolviendo en unos pocos años numerosos problemas en los que el nuevo cálculo demostró toda su fuerza, tales como el la isócrona, la catenaria, la tractriz, la isócrona paracéntrica o la braquistocrona.

2. ISAAC NEWTON

2.1 Isaac Newton (1642-1727)

Sus años más fecundos fueron durante el periodo 1665-1666 cuando cerraron la Universidad de Cambridge, donde era estudiante, debido a la peste bubónica. Newton se recluyó en su casa natal y allí descubrió el Teorema del binomio, el cálculo diferencial e integral, la ley de gravitación universal y la Teoría de los colores. Prácticamente todos los descubrimientos importantes de su vida. Newton tardó mucho en publicar sus trabajos ya que no le gustaban las controversias y quería evitar la crítica de sus contemporáneos. En los últimos años de su vida fue miembro del parlamento británico y presidente de la Royal Society y considerado como un tesoro nacional.

Tal como hemos indicado, Newton concibió su cálculo durante los años 1665-1666. Después lo describió en numerosas cartas personales y en un pequeño tratado no publicado, *De Analysi* (1669) que circuló entre los matemáticos ingleses de la época y que fue en parte incluido en el tratado *De Algebra* de John Wallis en 1669. Luego organizó y describió todos sus trabajos anteriores sobre el cálculo en *De Methodis Serierum et Fluxionum* que escribió en 1671, pero que no fue publicado hasta después de su muerte en 1736.

La principal obra de Newton es *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* que fue publicada en 1687 y donde expone muchísimas propiedades sobre las secciones cónicas y su famosa ley de gravitación universal. En este último no muestra realmente su cálculo, ya que los argumentos de Principia son principalmente de geometría sintética.

El último tratado que escribió, pero el primero que se publicó, fue *De Quadratura Curvarum*. Escrito entre los años 1691-1693 apareció como un apéndice de su *Opticks* de 1704. Cabe señalar también las dos cartas, donde expone su teorema del binomio, la *epistola prior* de Junio de 1676 y la *epistola posterior* de Octubre de 1676, que mandó al secretario de la Royal Society of London, Henry Oldenburg, para que éste se las transmitiera a Leibniz.

2.2 El Teorema del Binomio

La serie del binomio fue descubierta por Newton el invierno de 1664. Aparece expuesta en dos cartas, la *Epistola prior* de Junio de 1676 y la *Epistola posterior* de Octubre de 1676, que mandó al secretario de la Royal Society of London, Henry Oldenburg, para que se las transmitiera a Leibniz. Dice Newton:

"La extracción de raíces cuadradas se simplifica con este teorema

$$(P+PQ)^{m/n}=P^{m/n}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+\frac{m-3n}{4n}DQ+\cdots$$

donde A, B, C, ... son los términos inmediatos que les preceden en el desarrollo".

Expresado de esta forma suena poco familiar, Newton quiere decir que toma:

$$A=P^{m/n}$$

$$B=\frac{m}{n}AQ=\frac{m}{n}P^{m/n}Q$$

$$C=\frac{m-n}{2n}BQ=\frac{m-n}{2n}\left(\frac{m}{n}P^{m/n}Q\right)Q=\frac{\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}P^{m/n}Q^2$$

$$D=\frac{m-2n}{3n}CQ=\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{3x2}P^{m/n}Q^2$$

$$\ldots$$

Y así sucesivamente. De esta forma queda:

$$P^{m/n}(1+Q)^{m/n}=(P+PQ)^{m/n}=P^{m/n}\left(1+\frac{m}{n}Q+\frac{\frac{m}{n}\left[\frac{m}{n}-1\right]}{2}Q^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{m}{n}\left[\frac{m}{n}-1\right]\left[\frac{m}{n}-2\right]}{3\,x2}Q^3+\cdots\right)$$

Dividiendo por $P^{m/n}$:

$$(1+Q)^{m/n}=1+\frac{m}{n}Q+\frac{\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}Q^2+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{2x3}Q^2+\cdots$$

Que es la expresión más familiar que usamos ahora. Aunque el binomio para enteros positivos era conocido desde hacía tiempo, el interés del descubrimiento de Newton está en que lo usa para exponentes fraccionarios y negativos y en que aparece una suma infinita en vez del desarrollo finito anterior. En nuestra notación actual escribimos comúnmente:

$$(1+Q)^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Donde “a” es un número real cualquiera y los coeficientes binomiales se definen como:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Para el caso en que a sea entero positivo sale un desarrollo finito ya que:

$$\binom{\alpha}{n} = 0$$

para n > *a*, al ser cero uno de los factores del numerador que define el coeficiente binomial. Por ejemplo $(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^4$.

Pero en el caso de no ser a entero aparecen series infinitas como:

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1-x+x^2-x^3+\cdots$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\cdots$$

Newton escribió casos particulares como éstos en su carta y las usó para el cálculo de raíces cuadradas. Observó por ejemplo:

$$\sqrt{7} = \sqrt{9\left(1-\frac{2}{9}\right)} = 3\left(1-\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 3\left(1-\frac{1}{9}-\frac{1}{16^2}-\frac{1}{1458}-\frac{5}{52488}-\frac{7}{472392}-\cdots\right) \simeq 2.64576$$

Obteniendo una gran precisión con sólo unos pocos términos. El avance era considerable.

Ahora sabemos que la serie que define $(1+x)^a$ converge para $|x| < 1$. Newton no habla de convergencia, pero es consciente de ello y usa cierta intuición en sus cálculos, por ejemplo utilizaba:

$$y=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ \cdots$$

para x pequeños, pero la cambiaba a:

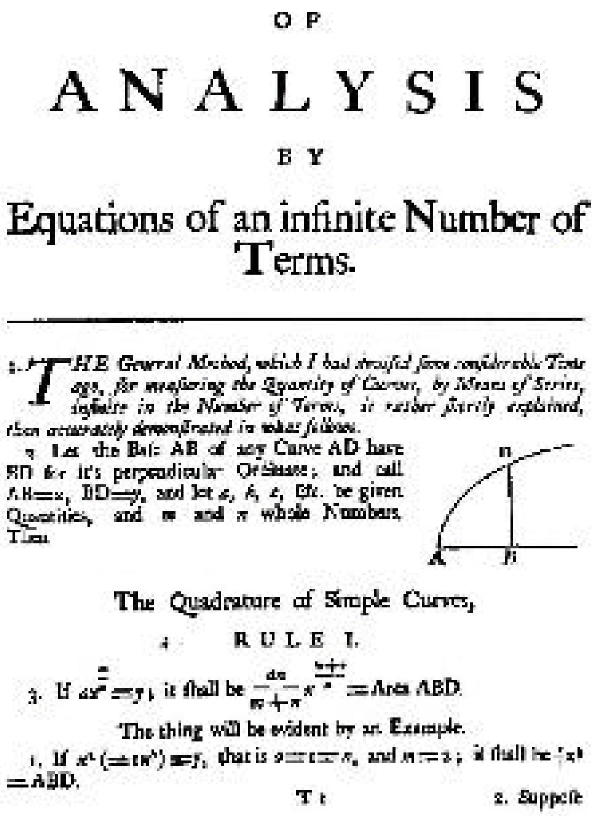
$$y=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1/x^2}{1+1/x^2}=x^{-2}-x^{-4}-x^{-6}-x^{-8}+\ \cdots$$

para x grandes.

2.2.1 De Analysi

Esta monografía circular de 1669 que mandó Newton a sus amigos y que fue publicado mucho después en latín en 1711 contiene ya las ideas esenciales del cálculo de Newton. Empieza dando unas reglas para calcular cuadraturas tal como se ve en la imagen de la primera página de esta publicación:

$$\text{REGULA I.}\qquad \text{Si}\quad ax^{m/n}=y;\qquad \text{Erit}\ \frac{an}{m+n}x^{(m+n)/n}=\text{Areae}\quad ABD.$$


OF

ANALYSIS

BY

Equations of an infinite Number of Terms.

1. THE General Method, which I had devised some considerable Time ago, for measuring the Quantity of Curves, by Means of Series, infinite in the Number of Terms, is rather shortly explained, than accurately demonstrated in what follows.

2. Let the Base AB of any Curve AD have BD for it's perpendicular Ordinate; and call AB=x, BD=y, and let a, b, c, &c. be given Quantities, and m and n whole Numbers. Then

The Quadrature of Simple Curves.

RULE I.

3. If $ax^{\frac{m}{n}}=y$, it shall be $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ = Area ABD.

The thing will be evident by an Example.

1. If $x^2 (=1x^{\frac{2}{1}})=y$, that is $a=1=n$, and $m=2$; it shall be $\frac{1}{3}x^3$ = ABD.

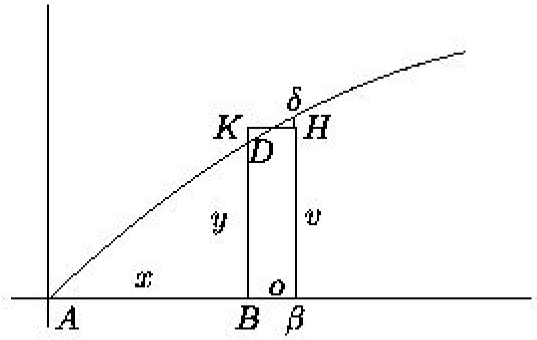
T t 2. Suppose

Primera edición inglesa de De Analysi (1745). Traducción del original en latín.

Más tarde en el mismo tratado da un procedimiento para hallar la ordenada de una curva cuya cuadratura ABD está dada. El proceso es interesante ya que es de alguna forma el comienzo del cálculo diferencial e integral y donde se ve el papel inverso que juegan la diferenciación y la integración. Lo explica con un ejemplo, aunque es claramente generalizable.

De acuerdo con la figura sean z=área(ABD), y=BD, x=AB, $B\beta$ = o. Elijamos ahora v=BK de tal manera que

área ($BD\delta\beta$) = área($BKH\beta$)=ov.



Consideremos por ejemplo la curva para la cual:

$$z=\frac{2}{3}x^{3/2}$$

Para facilitar los cálculos, elevamos al cuadrado la relación anterior para obtener $z^2=(4/9)x^3$. Por la elección que hemos hecho de v también se tiene:

$$(z+ov)^2=\frac{4}{9}(x+o)^3$$, esto es: $$z^2+2zov+o^2v^2=\frac{4}{9}(x^3+3x^2o+3xo^2+o^3)$$

Simplificando $z^2= 4/9x^3$ en cada lado de esta expresión y dividiendo por "o" queda:

$$2zv+ov^2=\frac{4}{9}(3x^2+3xo+o^2)$$

Newton toma ahora Bβ infinitamente pequeño. De la figura se observa entonces que v=y , y que los términos que contienen "o" se anulan, de donde:

$$2zy=\frac{4}{3}x^2$$

Sustituyendo ahora el valor de z, resulta finalmente $y=x^{1/2}$.

Newton introduce después un método iterativo para resolver ecuaciones que ahora lleva su nombre. Pone como ejemplo el resolver la ecuación:

$$y^3-2y-5=0$$

Observa primero que $y=2$ es una aproximación de la solución. Escribe luego $y=2+p$ y lo sustituye en la ecuación para encontrar:

$$p^3+6p^2+10p-1=0$$

Como p es pequeño, elimina los términos p^3, $6p^2$, para obtener $10p-1=0$, de donde $p=0.1$. De este modo $y=2.1$ es la segunda aproximación de la raíz buscada.

Toma ahora $p=0.1+q$, que sustituido en la ecuación para p da:

$$q^3+6.3\,q^2+11.23\,q+0.061=0$$

Tomando otra vez su parte lineal $11.23\,q+0.061=0$, obtiene $q=-0.0054$, lo que da el nuevo valor aproximado de la solución $y=2.0946$. Newton da un paso más en este ejemplo escribiendo $-0.0054+r=q$, y después sustituir en la ecuación para q y seguir el mismo proceso llega de este modo a la nueva aproximación $y=2.09455147$.

Newton aplica luego este método para resolver ecuaciones $f(x,y)=0$ más generales. Toma como ejemplo:

$$y^3+a^2y+axy-2a^3-x^3=0$$

Y observa que si $x=0$, entonces $y=a$ es la solución. Esta es la primera aproximación. Escribe como antes $a+p=y$, que sustituido en la ecuación da la cúbica en p:

$$p^3+3ap^2+(4a^2+ax)p+a^2x-x^3=0$$

Cuya parte lineal es $(4a^2+ax)p+a^2x-x^3=0$, de solución:

$$p=\frac{-a^2x+x^3}{4a^2+ax}=-\frac{x}{4}+\cdots$$

De donde toma $y=a-x/4$ como la segunda aproximación. Escribe ahora $q=-x/4+p$, etc., y continuando de esta forma va obteniendo la serie:

$$y=a-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}+\cdots$$

Más adelante utiliza un proceso parecido para invertir series. Considera el ejemplo de tomar como z el área debajo de la hipérbola $y=1/(1+x)$, esto es:

$$z=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+\cdots$$

Para invertir esta serie, toma primero sus cinco primeros términos, esto es la ecuación:

$$\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - z = 0$$

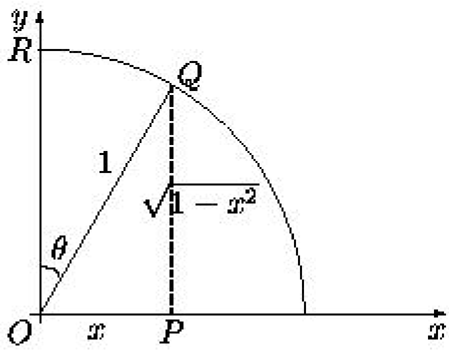
La va resolviendo y considerando más términos de la serie a invertir. De esta forma va obteniendo:

$$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \cdots$$

Que es la serie de la función exponencial e^z. Aunque sin utilizar el número e, esta es la primera vez que aparece esta serie en matemáticas.

2.2.2 Descubrimiento de las series de sin x y cos x

A partir de su binomio, Newton encuentra también series trigonométricas. Si consideramos la circunferencia de radio 1, de acuerdo con la figura:



es x=AQ=sin θ, esto es, θ = arcsinx, de manera que:

$$\theta = 2 \cdot \text{área(OQR)} = 2 \cdot [\text{área(ORQB)} - \text{área(OQB)}] =$$
$$= 2[\int_0^x \sqrt{1-x^2}\, dx - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}]$$

Por el desarrollo del binomio:

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \cdots$$

De donde integrando término a término:

$$\int_0^x \sqrt{1-x^2}\, dx = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \cdots$$

Mientras que:

$$x\sqrt{1-x^2} = x(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \cdots)$$

Sustituyendo y después de simplificar queda:

$$\theta = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots$$

Invirtiendo ahora la serie Newton obtiene:

$$x = \sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 - \frac{1}{5040}\theta^7 + \cdots$$

Encuentra luego la serie de cosθ como:

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$$

Y calcula las cuadraturas de la cicloide y luego de la cuadratriz, de ecuación x=y coty primero invirtiendo esta ecuación para encontrar la serie de y=y(x) y luego integrando término a término.

2.3 El método de Fluxiones

Newton da luego otra versión de su cálculo en "Methodus Fluxiorum et Serierum Infinitorum" que fue escrito en 1671 y publicado en 1736. Wallis, con permiso de Newton, incluyó el método de fluxiones en la páginas 390-396 de su Algebra.

Newton concibe las cantidades matemáticas como el movimiento continuo de un punto que traza una curva. Cada una de estas cantidades que aparecen (variable) x es un *"fluente"* y su velocidad, designada por $\dot{x}$, esto es una x con un puntito encima, es una *"fluxión".*

La parte infinitesimal pequeña en la que un fluente se incrementa por unidad de tiempo o, es $\dot{x}$*o el* momento del fluente.

El problema fundamental es, dada una relación entre fluentes hallar la relación entre sus fluxiones y recíprocamente. Si y=f(x) en un pequeño intervalo o de tiempo x se incrementa a x+o, y se incrementa a:

$$y + o\dot{y}$$

Al ser:

$$y + o\dot{y} = f(x + o\dot{x}) \quad \text{se tiene} \quad o\dot{y} = f(x + o\dot{x}) - f(x)$$

Es decir:

$$\dot{y} = \frac{f(x+o\,\dot{x})-f(x)}{o}$$

Veamos como hace Newton en un caso concreto. Si es $y=x^3$ obtenemos:

$$\dot{y} = \frac{(x+o\dot{x})^3 - x^3}{o} = \frac{3x^2\dot{x}o - 3x\dot{x}^2o^2 + o^3}{o} = 3x^2\dot{x} + 3x\dot{x}^2o + o^2$$

Luego elimina los términos que contienen o, ya que "se le supone infinitamente pequeño", quedando:

$$\dot{y} = 3x^2\,\dot{x}$$

Y por tanto, la relación entre fluxiones es:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3x^2$$

De esta forma su afirmación inicial del párrafo anterior de que el área:

$$y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Proviene de la curva $y=x^n$ es que el cociente de fluxiones:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x^n$$

Considerando luego que la fluxión de x es uno, es decir, que el incremento que considera en x por unidad de tiempo es uno.

Aplica también su método al caso de tener dada una curva en la forma f(x,y)=0. Por ejemplo considera el caso de la cúbica:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Sustituye x por $x+\dot{x}o$ e y por $y+\dot{y}o$, realiza el desarrollo, resta la relación x^3-ax^2+axy-y^3=0, cancela los términos con o^2 y o^3 por ser despreciables frente a o, y divide ahora por o para obtener:

$$3x^2\,\dot{x} - 2a\,x\,\dot{x} + ay\,\dot{x} + ax\,\dot{y} - 3y^2\,\dot{y} = 0$$

De donde obtiene la relación de fluxiones:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2-2ax+ay}{3y^2-ax}$$

Newton es consciente de las dificultades de rigor que tienen estos conceptos y posteriormente refina su interpretación en "De Quadratura Curvarum" , escrito en 1676 y publicado en 1704. Aquí habla de "últimas proporciones" ("ultimate ratios"). Dice: "Por última proporción de cantidades evanescentes debemos entender el cociente de estas cantidades, no antes de que desvanezcan, ni después, pero tal como van desvaneciendo."

Intuitivamente, esto viene a ser nuestro concepto de derivada interpretada como límite:

$$f'(x)= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

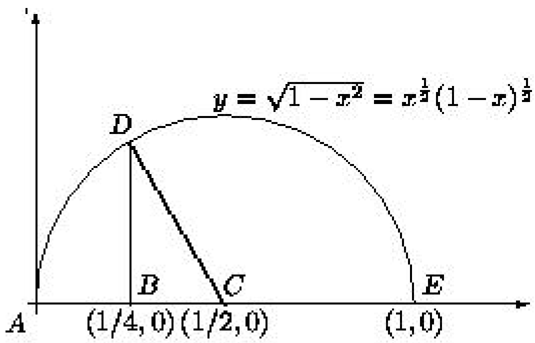
2.4 Cálculo de Newton del número p

*A*parece en su "Methodus Fluxiorum et Serierum Infinitorum," 1671. Newton considera la circunferencia de centro (1/2,0) y radio 1/2

$$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$$

De donde despejando y en función de x y usando el desarrollo del binomio:

$$y=x^{1/2}(1-x)^{1/2}=x^{1/2}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5}{128}x^4-\frac{7}{256}x^5-\cdots\right)=$$
$$=x^{1/2}-\frac{1}{2}x^{3/2}-\frac{1}{8}x^{5/2}-\frac{5}{128}x^{9/2}-\frac{7}{256}x^{11/2}-\cdots$$



Calcula entonces el área debajo de la curva integrando término a término:

$$A(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{5}x^{5/2} - \frac{1}{28}x^{7/2} - \frac{1}{72}x^{9/2} - \frac{5}{704}x^{11/2} - \cdots$$

Luego para x=1/4, el área de la región ADB es igual a:

$$\text{área (ADB)} = \frac{1}{12} - \frac{1}{160} - \frac{1}{3584} - \frac{1}{36864} - \frac{5}{1441792} - \cdots = 0.076663$$

Calcula luego la misma área por geometría, ya que área (ADB)= área(sectorACD)- área(triánguloDBC). Para evaluar esta última relación calcula primero:

$$BD = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Luego se observa de los lados del triángulo BCD que el ángulo en C es de 60º. De donde:

$$\text{área(sectorACD)} = \frac{1}{3}\ \text{área(semicircunferencia)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{\pi}{24}$$

Mientras que:

$$\text{área (triángulo } DBC) = \frac{1}{2}BC \times BD = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{32}$$

Por tanto:

$$\text{área}\,(ADB) = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}$$

Igualando los dos valores encontrados anteriormente para esta área resulta:

$$\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} = 0.0767737208\ldots$$

Y por consiguiente:

$$\pi \equiv 24\left(0.0767737 + \frac{\sqrt{3}}{32}\right) = 3.141607404\ldots$$

Valor que aquí hemos calculado correcto hasta cuatro decimales(el error es 1.33 x10^{-5}). Newton de hecho usa 20 términos del binomio para llegar a calcular π con 16 decimales correctos.

Luego dice *"I am ashamed to tell you how many figures I carried these calculations, having no other business at the time"* (Me avergüenzo de decirle cuantas cifras he calculado, no teniendo nada más que hacer en aquél momento). A pesar de sus afirmaciones, este es un nuevo paso de gigante en el cálculo del número π.

3. W.G. LEIBNIZ (1646-1716)

3.1 Sumas y diferencias.

Cuando a sus 26 años conoció en 1672 a Huygens en Paris, éste le planteó el problema de sumar los inversos de los números triangulares:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}+\cdots$$

Leibniz observó que cada término se puede descomponer como:

$$\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

De donde:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots=2\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots=2$$

Leibniz, tal como hizo en la suma de la serie de los inversos de los números triangulares, consideraba sumas y diferencias de sucesiones de números. Observó por ejemplo que dada la sucesión $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, si consideramos la sucesión de diferencias $d_1, d_2, \dots, d_n$, donde:

$$d_i=a_i-a_{i-1} \text{ . Entonces}$$
$$d_1+d_2+\cdots+d_n=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_0$$

Es decir, la suma de diferencias consecutivas es igual a la diferencia entre el último y el primer término de la sucesión original.

Por ejemplo, dada la sucesión de cuadrados

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots, n^2$$

Sus primeras diferencias son:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 2n-1$$

Ya que $i^2-(i-1)^2=2i-1$. Luego se sigue que la suma de los n primeros números impares es n^2:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

Leibniz utiliza este método en otros casos. Por ejemplo en relación a la serie geométrica

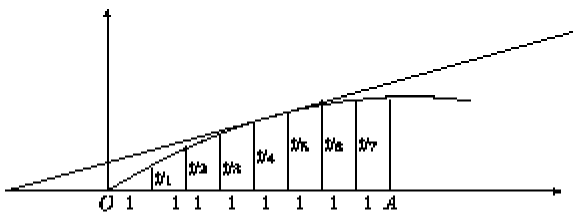
$$1,q,q^2,\ \ldots\ ,q^n,\ \ldots$$

Obtiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

3.2 El cálculo de Leibniz

Leibniz no tardó en aplicar a la geometría sus observaciones de que las sumas de sucesiones y sus diferencias consecutivas son procesos inversos el uno del otro. Consideremos una curva como la de la figura donde aparece una sucesión de ordenadas equidistantes $y_1,y_2,y_3,..,y_n$:



Si suponemos que la distancia entre estas ordenadas es 1, entonces su suma $y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n$ es una aproximación de la cuadratura de la curva, mientras que la diferencia entre dos sucesivas y_i´s da aproximadamente la pendiente de su tangente. Además, cuanto más pequeña sea la unidad 1 elegida, mejor será la aproximación. Si la unidad se pudiera elegir *infinitamente pequeña*, entonces las aproximaciones serían exactas, la cuadratura sería igual a la suma de ordenadas y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de ordenadas. De esta forma y por su analogía con las sucesiones numéricas, Leibniz observa que la determinación de cuadraturas y el cálculo de tangentes son operaciones inversas la una de la otra.

Leibniz considera una curva como una poligonal de infinitos lados donde dy es la diferencia infinitesimal de dos ordenadas consecutivas, dx la diferencia de dos abscisas consecutivas e $\int ydx$ representa la *suma* de los pequeños rectángulos infinitesimales ydx.

De esta forma el teorema fundamental del cálculo aparece como obvio. Esto es, para hallar el área debajo de una curva con ordenadas y, debemos hallar una curva de ordenadas z de tal manera que dz/dx=y, en cuyo caso es también $\int ydx=z$.

En la primera notación de sus manuscritos Leibniz escribe:

$$\mathrm{omn}\cdot l = y$$

Donde omn es omnia, que en latín significa suma, y donde *l* son diferencias. Con ello empieza a desarrollar su cáalculo y la expresión simplemente significa que la suma de las primeras diferencias de una sucesión que empieza por 0 es igual al último término. Después iría cambiando su notación y escribe la anterior relación como $\int dy=y$ que es la que usamos actualmente. El signo integral $\int$ no es más que una S elongada que significa suma.

La idea de su cálculo es que las fórmulas y relaciones geométricas se realicen de manera casi automática por medio de las reglas del cálculo de diferencias:

$$d(x+y)=dx+dy$$
$$d(xy)=x\ dy+y\ dx$$
$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\ dx-x\ dy}{y^2}$$
$$d(x^n)=n\,x^{n-1}\ dx \text{ etc.}$$

Para demostrar por ejemplo la regla d(xy)=x dy+y dx, calcula la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión producto xy:

$$d(xy)=(x+dx)(y+dy)-xy=xdy+ydx+dx\ dy$$

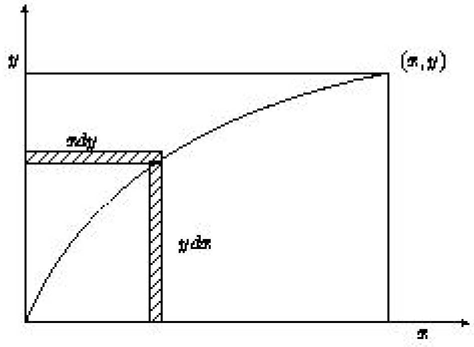
Y luego omite la cantidad dx dy por ser infinitamente más pequeña en comparación con los otros términos. De esta regla Leibniz deduce la integración por partes:

$$\int x\ dy=xy-\int y\ dx$$

Aunque las demuestra como teoremas, siempre que puede intenta relacionar sus operaciones analíticas con resultados geométricos familiares. Por ejemplo para esta última integración por partes, observa que es también la adición de áreas:

$$\int x\ dy+\int y\ dx=xy$$

De acuerdo con la figura:



Para probar

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2}$$

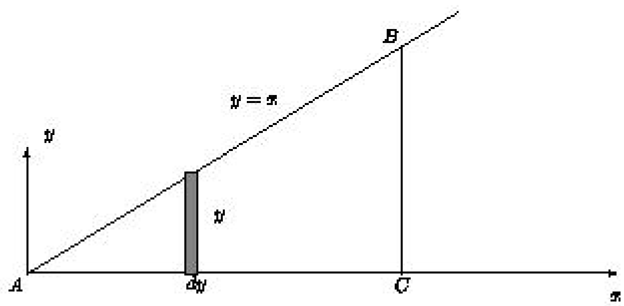
Escribe:

$$d\ \frac{y}{x}=\frac{y+dy}{x+dx}-\frac{y}{x}=\frac{xdy-ydx}{x^2+x\ dx}$$

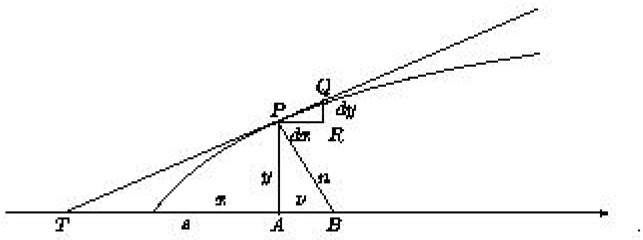
Y otra vez cancela xdx del denominador por ser pequeño frente a x^2. Otra relación es por ejemplo:

$$\int y\ dy=\frac{y^2}{2}$$

Para su prueba, piensa en términos de la función y=x. Tal como se observa en la figura el área del triángulo ABC es la suma de los y dy, para pequeños dy, pero esta área es $y^2/2$.



En sus aplicaciones geométricas, dado un punto P=(x,y) sobre una curva, tal como se observa de la figura:



Aparecen las llamadas *subtangente* s=TA, *tangente* t=TP, *normal* n=PB y *subnormal* n = AB. Todas estas variables tienen entidad propia y están relacionadas unas con otras. Por ejemplo se tiene por la semejanza:

$$\frac{y}{s} = \frac{\nu}{y}$$

Para cada una de estas variables se pueden considerar también sus diferencias. Si consideramos las diferencias dx y dy, el pequeño triángulo PQR se llama el *triángulo característico* y se tiene por ejemplo la relación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s}$$

Todo este cálculo y en especial su notación resultó ser muy manejable y de gran utilidad, lo que contribuyó decisivamente a su éxito. Notación y concepto son virtualmente inseparables. Por ejemplo la regla de la cadena para z=f(y) e y=g(x) que nosotros escribimos como primero la composición h(x)=f(g(x) y luego:

$$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

En su notación diferencial es simplemente:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Aunque desde el punto de vista lógico le falta rigor a esta fórmula simbólica, ya que cancela dy's como si fueran números reales, no sólo halla correctamente al resultado sino que sugiere además la manera de demostrarla, reemplazando las diferenciales dx,dy,dz por incrementos finitos Δx, Δy, Δz y pasando luego al límite.

Leibniz tardó unos años en presentar estas ideas en público ya que era una formulación intuitiva, pero que tenía el problema de trabajar con cantidades infinitamente pequeñas y esto no estaba rigurosamente definido ni era muy aceptable en matemáticas. Su primera publicación fue un corto artículo titulado "*Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus*", (Un nuevo método para máximos y mínimos y tangentes, no impedido por cantidades racionales o irracionales y un singular nuevo tipo de cálculo para ellas), que apareció en 1684 en *Acta eruditorum*.

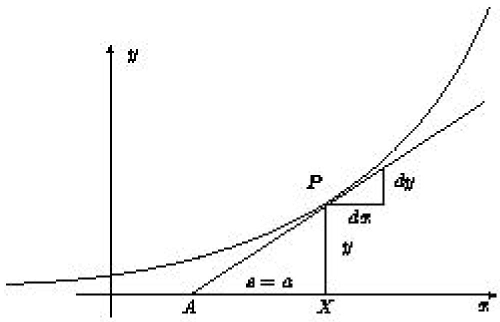
En este trabajo original, después de introducir su cálculo, Leibniz da tres ejemplos de la aplicaciones, el primero prueba el principio ya conocido por Descartes y Fermat de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de refracción, el segundo es un problema geométrico. Luego, dice Leibniz:

"Y esto es sólo el comienzo de una mucho más sublime Geometría, de problemas incluso mucho más difíciles y de los más bonitos de matemáticas aplicadas, los cuales sin nuestro cálculo diferencial o algo similar nadie podría atacar con tanta facilidad. Añadiremos como apéndice la solución del problema que De Beaune propuso a Descartes, quién lo intentó resolver el el Vol. 3 de sus Lettres, pero sin éxito"

En realidad Descartes había encontrado prácticamente la naturaleza de esta curva, pero carecía de instrumentos adecuados para su solución. Este problema y otros que fueron apareciendo después pusieron de manifiesto la potencia del nuevo cálculo. Exponemos este problema en la sección siguiente.

3.3 El problema de De Beaune

El problema que Florimont De Beaune había propuesto originalmente a Descartes en 1639 es: *Hallar una curva cuya subtangente sea una constante dada a*.



De la relación:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{s}{y}$$

Obtenemos tomando s=a

$$a \quad dy = y \quad dx$$

Leibniz considera dx=b constante, lo que equivale a tener las abscisas en progresión aritmética. Tomando k=b/a, la relación anterior da:

$$dy = k \quad y$$

Esto es, los incrementos dy son proporcionales a sus las ordenadas y. Más concretamente, si tomamos la sucesión de abscisas:

$$x_0=x,\ x_1=x+b,\ x_2=x+2b,\ x_3=x+3b\ , \ldots$$

Que están en progresión aritmética, al ser $dy_1=y_1-y_0=k\ y_1$, será $y_1=k_1\ y_0$ para la constante $k_1=1/(k+1)$. Luego las correspondientes ordenadas:

$$y_0,\ y_1=k_1\ y_0,\ y_2=k_1^{\,2}\ y_0, y_3=k_1^{\,3}\ y_0, \ldots$$

Están en progresión geométrica. Leibniz concluye diciendo que la curva es una "*logarítmica*".

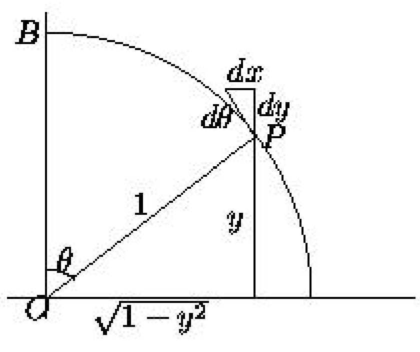
En nuestro cálculo actual de la relación diferencial que define la curva a dy=ydx, obtenemos:

$$a\,\frac{dy}{y}=dx$$

De donde integrando a logy=x+C. (Obsérvese que la notación que usamos ahora para este proceso es la original). Leibniz viene a describir una poligonal solución de una ecuación en diferencias que aproxima a la exponencial y su ecuación diferencial correspondiente, siendo la aproximación cada vez mejor a medida que dx se va haciendo infinitésimo.

3.4 Desarrollo del seno a partir de su ecuación diferencial

Leibniz utiliza series de potencias para resolver muchas de sus ecuaciones diferenciales. Por ejemplo consideremos la figura donde aparece el primer cuadrante de la circunferencia de radio 1, donde P=(x,y) y θ es el ángulo que forma POB.



Por semejanza de triángulos:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

Además por el teorema de Pitágoras $dx^2+dy^2=d\theta^2$. Elevando al cuadrado la primera relación, despejando dx^2 y sustituyendo en la segunda obtenemos después de simplificar:

$$dy^2+y^2\, d\theta^2=d\,\theta^2$$

Que es la ecuación diferencial que verifica $y=\sin\theta$. Para resolver esta ecuación Leibniz considera $d\theta$ como constante y aplica el operador d a la ecuación. Se obtiene $d[dy^2+y^2\, d\theta^2]=0$, de donde por la regla del producto:

$$d[dy\cdot dy+y^2\, d\theta^2]=2(dy)(d\ \ dy)+2y\, dy\, d\theta^2=0$$

Esto es:

$$\frac{d^2y}{d\,\theta^2}=-y$$

Que es la ecuación diferencial de segundo orden de $y=\sin\theta$. Ahora Leibniz supone que podemos escribir la serie de potencias con coeficientes indeterminados:

$$y=\sin\theta = b\,\theta+c\theta^3+e\,\theta^5+f\,\theta^7+g\theta^9+\cdots$$

Donde ha tomado el término constante igual a cero al ser $\sin 0=0$ y sólo toma potencias impares al ser $\sin\theta$ impar. Diferenciando dos veces esta expresión se obtiene:

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}=2\cdot 3\ c\ \theta+4\cdot 5\ e\ \theta^3+8\cdot 9\ g\ \theta^7+\cdots$$

Que debe ser igual a $-y=-b\,\theta-c\,\theta^3-e\,\theta^5-f\,\theta^7-g\theta^9-\cdots$ Igualando coeficientes se obtiene:

$$\begin{aligned} &2\cdot 3\ c=-b\\ &4\cdot 5\ e=-c\\ &8\cdot 9\ g=-f\\ &\cdots \end{aligned}$$

De donde tomando $b=1$ como condición inicial obtenemos sucesivamente $c=-1/3!$, $e=1/5!$, $f=-1/7!$, $g=1/9!$, ... , esto es:

$$\sin\theta = \theta-\frac{1}{3!}\,\theta^3+\frac{1}{5!}\,\theta^5-\frac{1}{7!}\,\theta^7+\frac{1}{9!}\,\theta^9-\cdots$$

Obtiene por tanto con su método de diferencias la relación que ya había obtenido Newton en 1676 con su serie del binomio.

4. Resumen y desarrollo posterior

Una vez que hemos descrito con detalle separadamente las ideas de Newton y Leibniz en el desarrollo del cálculo como una nueva y coherente disciplina matemática vamos a comparar y contrastar ambos procedimientos.

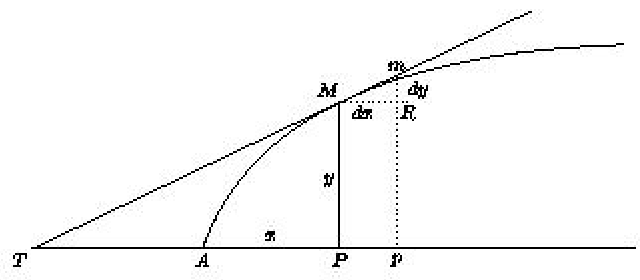
Tal como hemos visto Newton concibe la derivada de y=f(x) como el cociente entre fluxiones:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Donde considera las fluxiones $\dot{x},\dot{y}$ como las velocidades en que cambian los fluentes x,y. Su concepción es cinemática. En cambio Leibniz considera el cociente anterior dy/dx como cociente entre diferencias. La integral para Newton es una integral definida, es el fluente a determinar para una fluxión dada. Para Leibniz la integral es, en cambio, una suma infinita de diferenciales. A pesar de estas diferencias de concepto luego ambos la calculan de la misma forma, como un proceso inverso de derivadas. Ambos desarrollan el mismo cálculo desde puntos de vista distintos y observan como inversos los procesos de diferenciación e integración.

Antes se habían calculado áreas, volúmenes y tangentes, pero eran razonamientos particulares para cada caso concreto sin que se observara con claridad que el cálculo de áreas y el de tangentes son inversos uno del otro. El nuevo cálculo es universal, en el sentido en que se aplica del mismo modo a todo tipo de funciones. Newton y Leibniz lo aplicaron con éxito para calcular áreas como la cisoide o la cicloide, tangentes, longitudes de arco, problemas de máximos y mínimos, geométricos, etc.

Para ilustrar con un ejemplo sencillo los conceptos del cálculo de Newton y de Leibniz, veamos como calcularían ambos la tangente a la parábola $y^2=ax$ en un punto M=(x,y) de la figura:



Dada la relación entre fluentes $y^2=ax$ Newton calcularía primero la relación entre sus fluxiones, de:

$$(y + o\dot{y})^2 = a(x + o\dot{x})$$

Elevando al cuadrado:

$$y^2 + 2yo\dot{y} + o^2\dot{y}^2 = ax + oa\dot{x}$$

Simplificando y dividiendo por “o” resulta:

$$2y\dot{y} + o\dot{y}^2 = a\dot{x}$$

De donde cancelando luego los términos que contienen “o” se obtiene 2y $\dot{y}$=a $\dot{x}$, esto es:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{2y}$$

Que nos daría la pendiente de la tangente.

En el primer libro de texto de cálculo diferencial, "*Analyse des Infinitement Petits"* de L'Hopital de 1696, aparece exactamente el ejemplo que estamos calculando. De hecho la figura geométrica anterior está tomada del este libro, sección 2, pag. 12. Su solución, siguiendo de diferencias de Leibniz dice asi:

"Si se quiere que ax=yy exprese la relación de AP a PM, la curva AM será una parábola que tendrá por parámetro la recta dada a y tendrá, tomando diferencias en cada miembro:

$$a \ dx = 2y \ dy$$

Por tanto dx=2ydy/a y

$$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{2yy}{a} = 2x$$

Donde hemos sustituido yy por su valor ax. De donde se deduce que si se toma como PT el doble de AP y se considera la recta MT, ella será tangente en el punto M. “*Ce qui était proposé*”.

Newton la derivada como cociente entre fluxiones, o como "razón última de cantidades evanescentes" presentaba problemas de rigor lógico. Para Leibniz sin embargo, el cociente dy/dx era "simplemente" un cociente con interpretación geométrica clara. Los problemas de interpretación se volvían más agudos al considerar derivadas de mayor orden. Debido a su facilidad y al genial tratamiento que tuvo por parte de los hermanos Bernoulli y por Euler el cálculo de Leibniz empezó a cosechar grandes éxitos. Sus seguidores se preocupaban menos de sus aspectos lógicos y más de sus aplicaciones ya que era un cálculo que funcionaba. Permitió resolver problemas tales como el de la braquistocrona o de la catenaria que habían sido intratables hasta entonces.

En cambio en Inglaterra los matemáticos se preocuparon mucho más por los problemas de rigor lógico, paralizando con ello su aplicación. Una vigorosa y malintencionada exposición de las inconsistencias del nuevo cálculo fue la que escribió el obispo anglicano de la diócesis de Cloyne (Irlanda) George Berkeley(1685-1753). Berkeley escribió en 1734 un ensayo titulado "*The Analyst, or A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*". El "matemático infiel" era Edmund Halley (1656-1742), el famoso astrónomo y amigo de Newton, quién parece ser que convenció a un conocido sobre la inutilidad de la doctrina cristiana y éste rehusó el consuelo espiritual de Berkeley cuando estaba en su lecho de muerte.

Este es un párrafo del argumento de Berkeley:

"Y ¿Qué son las fluxiones? Las velocidades de incrementos evanescentes. Y ¿Qué son estos mismos incrementos evanescentes? Ellos no son ni cantidades fimnitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, ni nada. ¿No las podríamos llamar fantasmas de cantidades que han desaparecido?"

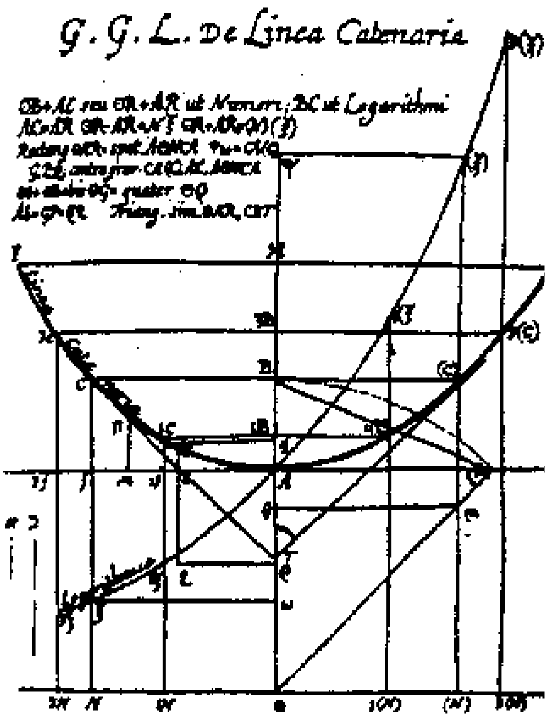
A finales de 1690 Leibniz fue duramente atacado por los seguidores de Newton, quienes le acusaban de plagio. Su principal argumento fueron las cartas que Newton le había mandado via Oldenburg. Al irse incrementando los ataques Leibniz pidió en 1711 a la Royal Society of London, de la que era miembro, para que interviniera en el asunto. La Royal Society nombró una comisión para que estudiara el caso y en 1712, movida más que nada por motivos de nacionalismo y maniobrada por Newton, decidió que Leibniz había en efecto plagiado a Newton. Hoy sabemos que tanto Newton como Leibniz desarrollaron independientemente su cálculo.

Este desafortunado incidente separó en dos bandos los matemáticos de Inglaterra y del Continente por mucho tiempo. La ironía del destino, fue que la victoria inglesa hizo que sus matemáticos rehusaran sistemáticamente el uso de los métodos de Newton, cerrando para si con ello el tremendo desarrollo que la matemática tuvo en el siglo XVIII.

4. Referencias

Para biografías de Newton, Leibniz y de otros matemáticos en general se pueden consultar:

- http://www.geocities.com/grandesmatematicos/
- http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%20history/index.html
- Ch. C. Gillispie, *Dictionary of Scientific Biography,* es una excelente enciclopedia de biografías de científicos.
- Antonio J. Durán, *Historia, con personajes de los conceptos del cálculo,* Alianza Universidad AU 861, un ameno y completo librito de bolsillo que trata sobre estos temas.



Jakob Bernoulli lanzó el desafío, en 1690, de hallar la curva que formaría una cadena suspendida por sus dos extremos. Se estableció un año de plazo para que los participantes pudieran mandar soluciones. Leibniz, Huygens y el hermano de Jakob, Johann Bernoulli, hallaron la respuesta y éstas se publicaron en el Acta Eruditorum.

Galileo ya había estudiado antes este problema en 1638, pero careciendo de las herramientas matemáticas necesarias concluyó, erróneamente, que la curva es un arco de circunferencia. Encontrar esta curva, la catenaria, fue uno de los primeros grandes éxitos del nuevo cálculo.

En la figura de la izquierda aparece el grabado original de la publicación de Leibniz de Junio de 1691. En una publicación posterior, Leibniz demuestra como aplicar la catenaria en navegación, en el caso en que el capitán extravíe su tabla de logaritmos.

Bartolomé Barceló
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid