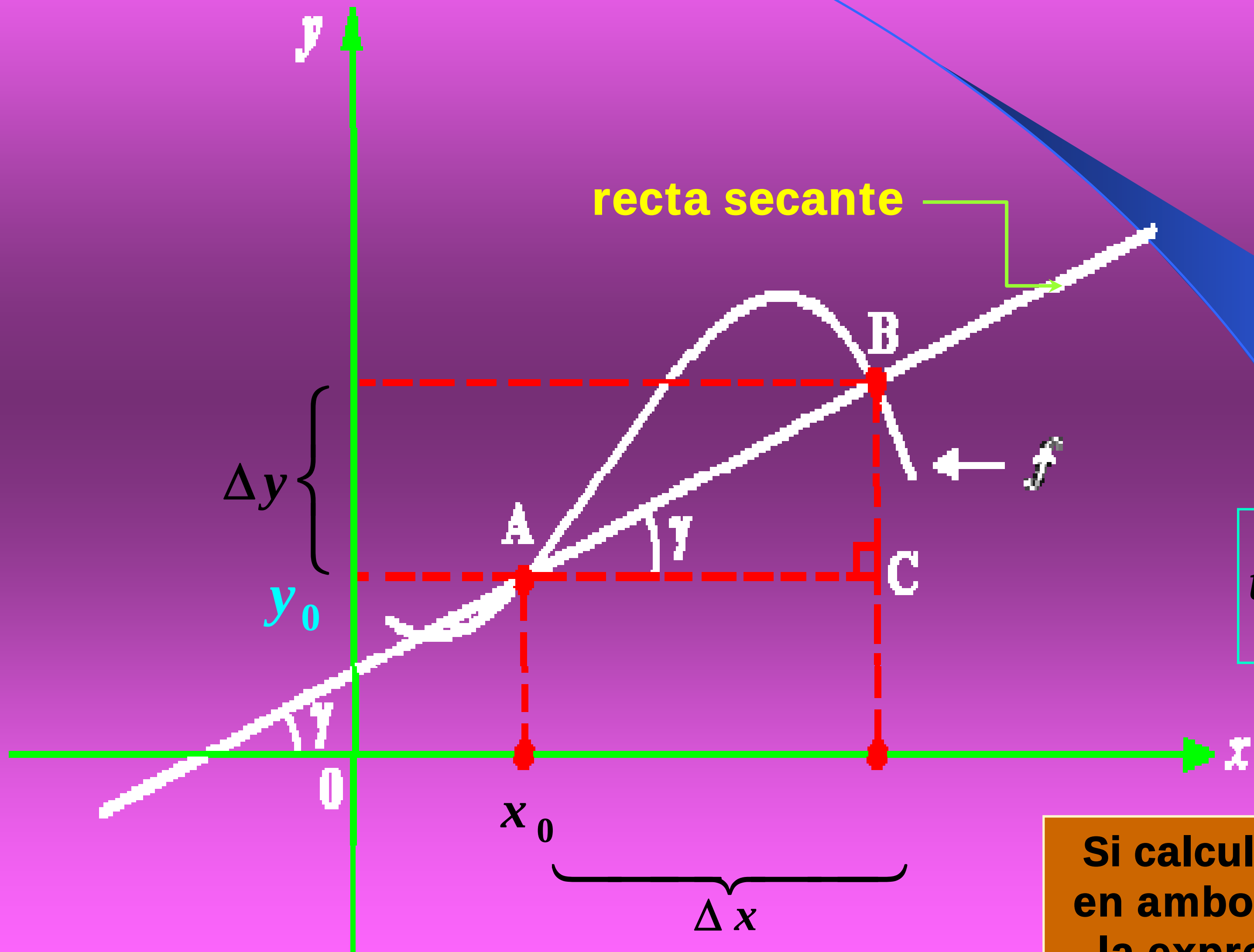
F A C U L T A D
DE
I N G E N I E R Í A

M.E.M. ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
ING. SERGIO CARLOS CRAIL CORZAS

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

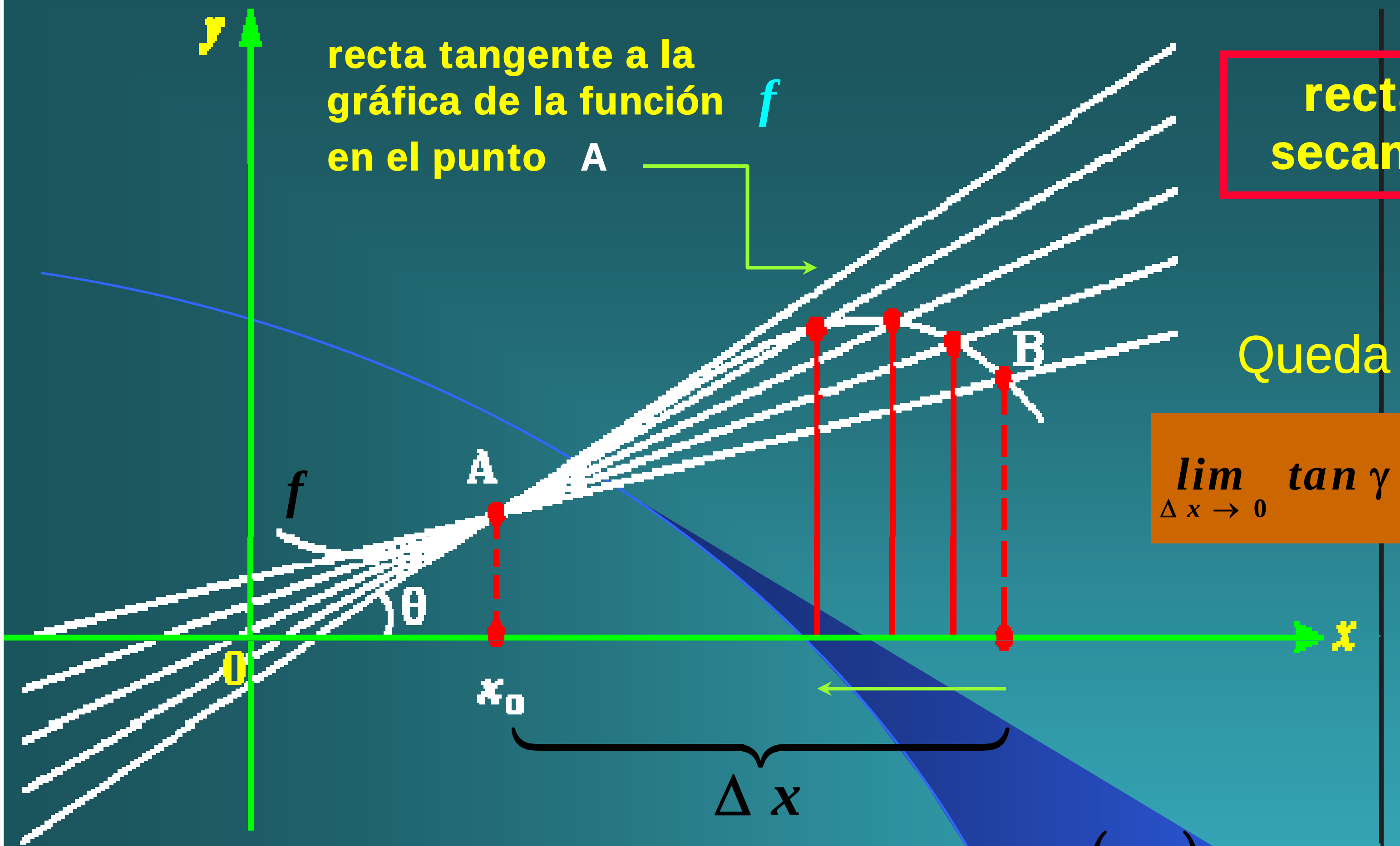
Sea la gráfica de la función $y = f\ (\ x\ )$



Del triángulo ABC, se tiene

$$\tan \gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si calculamos el límite en ambos miembros de la expresión anterior



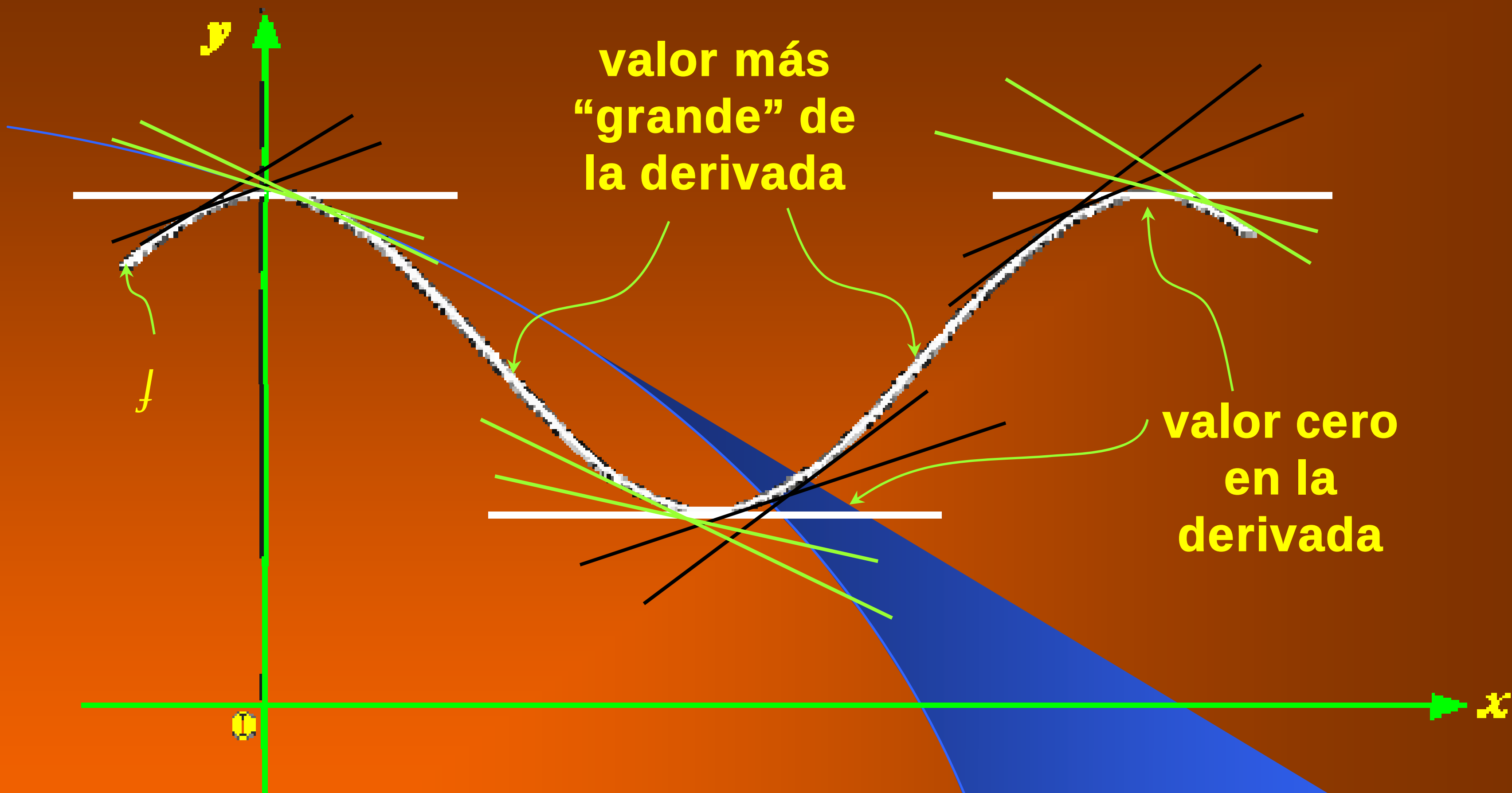
Queda entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \tan \gamma = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

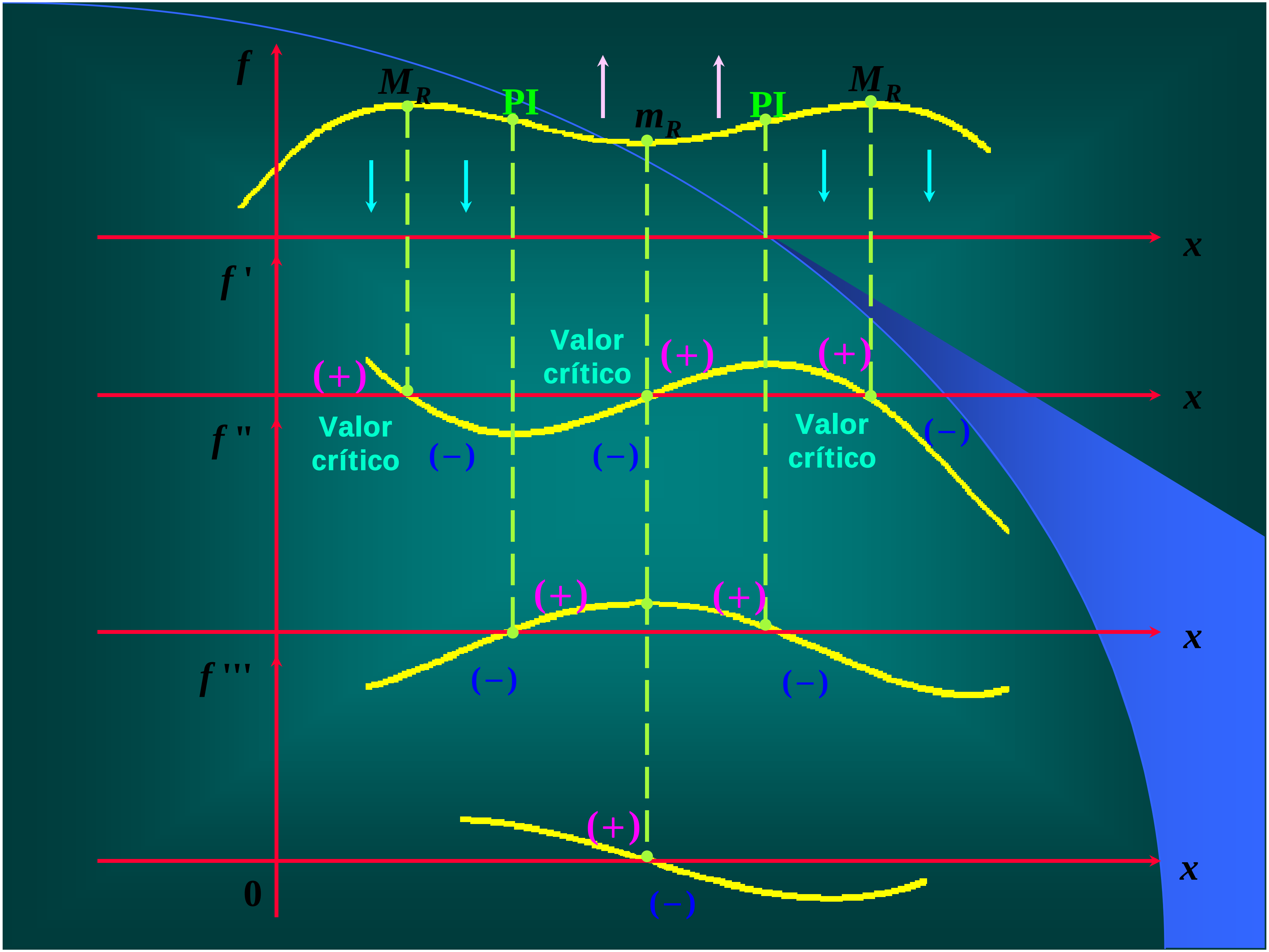
En el segundo miembro, por definición es $f'(x_0)$ y el primer miembro se convierte en la $\tan \theta$, siendo θ el ángulo de inclinación de la recta tangente a la grafica de la función f.

Esto es: $\tan \theta = f'(x_0)$ pero $\tan \theta = m_T$ $\Rightarrow$ $\boxed{f'(x_0) = m_T}$

EL VALOR DE LA DERIVADA A TRAVÉS DEL VALOR DE LA PENDIENTE DE LAS RECTAS TANGENTES A LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN



- El valor más cercano a **cero** de la derivada, se presenta alrededor de los puntos de la gráfica donde hay **cimas o simas**, esto es, en donde la recta tangente es horizontal.
- El valor **más grande** en valor absoluto de la derivada, se obtiene en los puntos de la gráfica donde la recta tangente tiene mayor **verticalidad**.



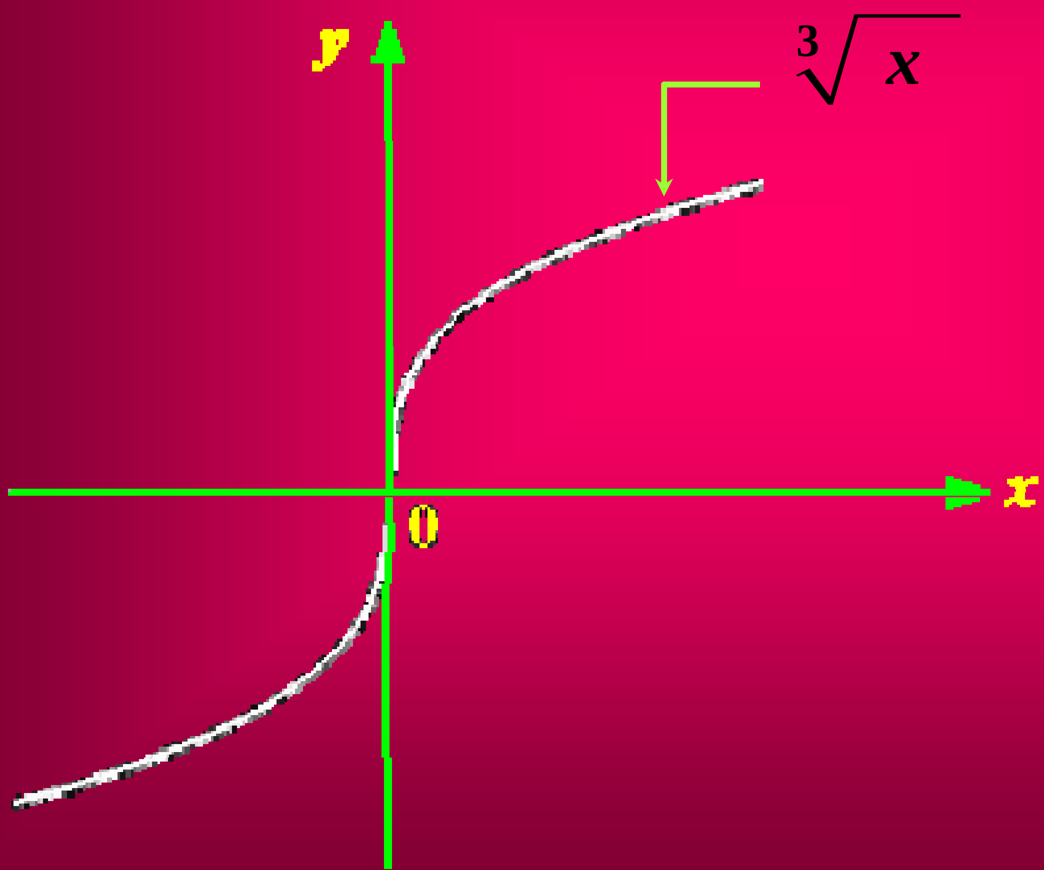
f
M_R
PI
m_R
PI
M_R
x
f '
(+)
Valor crítico
(+)
(+)
x
f "
Valor crítico
(−)
(−)
Valor crítico
(−)
(+)
(+)
x
f '''
(−)
(−)
(+)
x
0
(−)

O B S E R V A C I Ó N

No siempre sucede que cuando la derivada es cero o se indefine, hay máximo o mínimo relativos en una función. Por ejemplo:

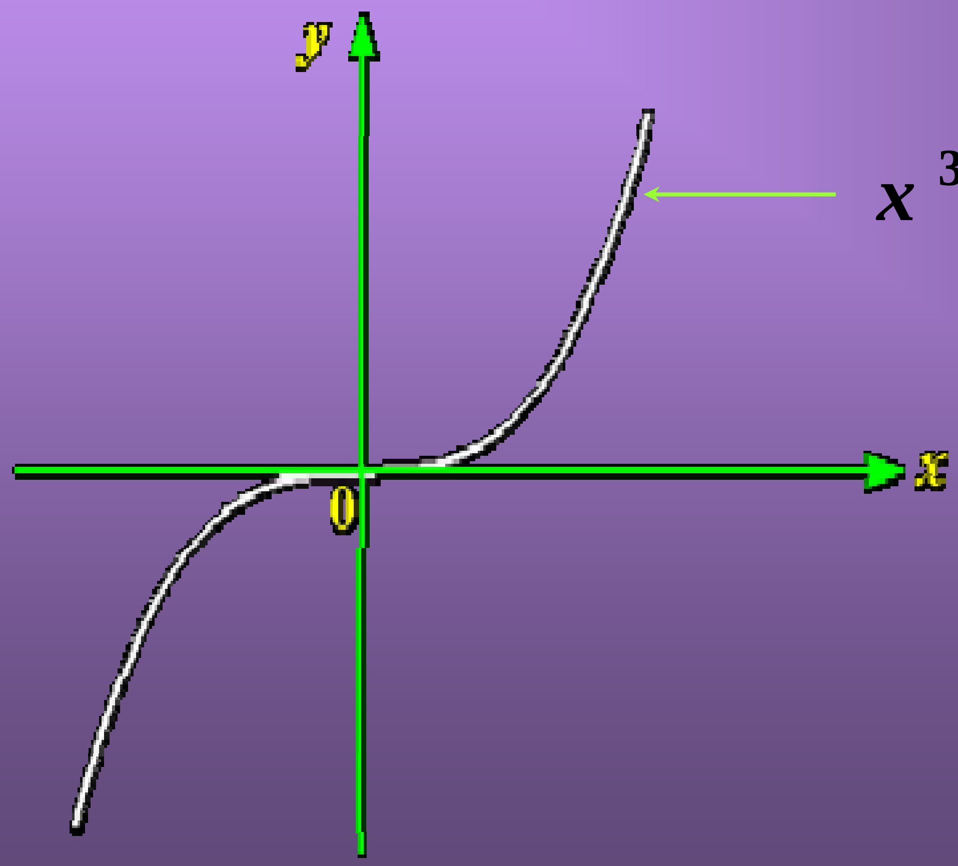
Si de la función $y = \sqrt[3]{x}$, obtenenos su derivada $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Nos percatamos que si $x = 0$ la derivada está indefinida, pero la función no tiene ni máximo ni mínimo relativos.



No hay ni máximo ni mínimo relativos

Considerando ahora la función $y = x^3$, su derivada es $y' = 3x^2$, si $x = 0$, la derivada es cero, pero no hay ni máximo ni mínimo relativos.



No hay ni máximo ni mínimo relativos

C O M E N T A R I O

Si una función es estrictamente creciente o decreciente, no tendrá cambio de signo su primer derivada, y por lo tanto, no tendrá ni máximos ni mínimos relativos

E J E M P L O

Para la función cuya regla de correspondencia es

$$y = (x - 1)(x + 1)^3$$

obtener:

a) los intervalos donde es creciente o decreciente,

b) los intervalos donde su gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo,

c) sus máximos y mínimos relativos y

d) trazar su gráfica.

Para obtener lo anterior se requiere analizar la función primera derivada y la función segunda derivada. Entonces

$$\boxed{y' = 3(x-1)(x+1)^2 + (x+1)^3}$$

si se factoriza

$$\boxed{y' = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)^2}$$

Por lo que los valores críticos son $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$

ANALICEMOS EL SIGNO DE LA DERIVADA

Intervalo	$4(x+1)^2$	$\left(x-\frac{1}{2}\right)$	$f'(x)$	C/D	M_R/m_R
$x < -1$	$+$	$-$	$-$	D	$ni\ M_R$
$-1 < x < \frac{1}{2}$	$+$	$-$	$-$	D	$ni\ M_R$
$x > \frac{1}{2}$	$+$	$+$	$+$	C	m_R

$$f(-1) = 0, \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{16}$$

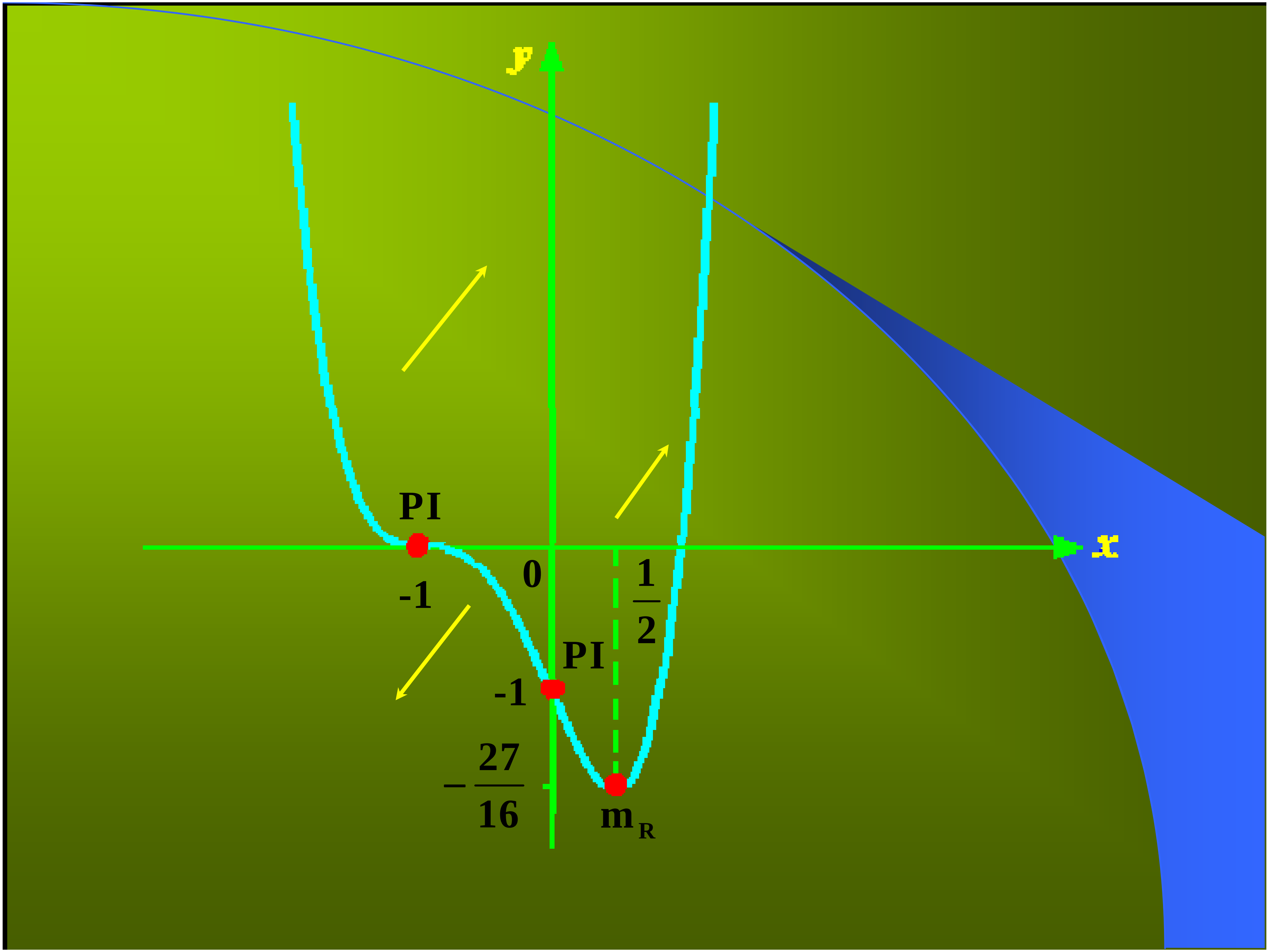
Si obtenemos la segunda derivada

$y'' = 12x\,(x+1)$ los valores donde se anula son $x = -1$ y $x = 0$

ANALICEMOS EL SIGNO DE LA SEGUNDA DERIVADA

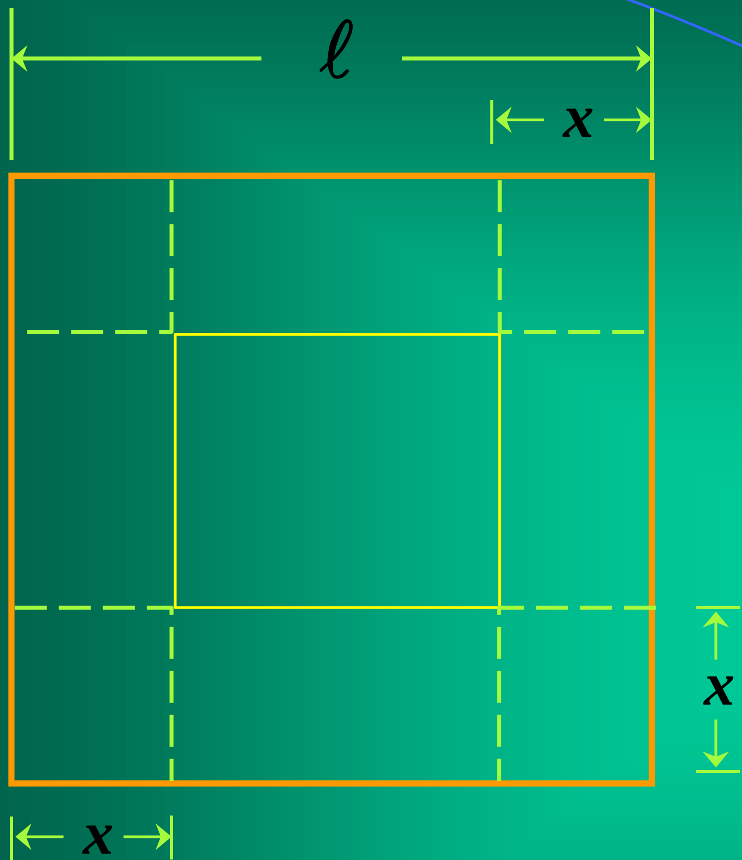
Intervalo	$12x$	$x+1$	$f''(x)$	$\overset{+}{\cup}$ / $\underset{-}{\cap}$
$x < -1$	$-$	$-$	$+$	$\overset{+}{\cup}$
$-1 < x < 0$	$-$	$+$	$-$	$\underset{-}{\cap}$
$x > 0$	$+$	$+$	$+$	$\overset{+}{\cup}$

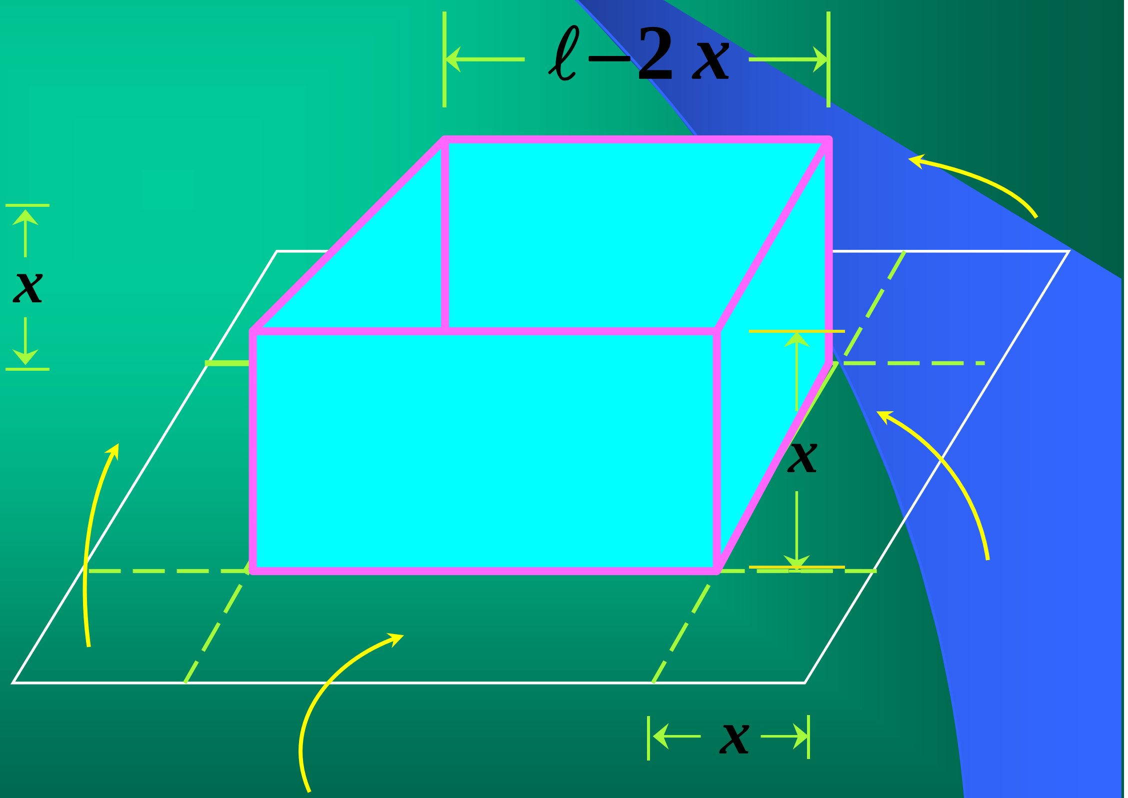
$\boxed{f(-1) = 0\,, \qquad f(0) = -1}$


y
x
PI
-1
0
1/2
PI
-1
$-\frac{27}{16}$
m_R

Analicemos el siguiente problema:

Con una lámina cuadrada de longitud ℓ, se construirá una caja. cortando de sus esquinas cuadrados de longitud x, doblando las pestañas hacia arriba.





Calcular el valor de x, tal que el volumen de la caja sea el mayor posible.

La función que representa el volumen es

$$Volumen = x(\ell - 2x)^2$$

Si se deriva

$$V' = 12\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\left(\frac{\ell}{6} - x\right)$$

Por lo que la segunda derivada es

$$V'' = 24\left(x - \frac{\ell}{3}\right)$$

De la primer derivada observamos que los valores críticos son

$$x = \frac{\ell}{6} \quad \text{y} \quad x = \frac{\ell}{2}$$

entonces la segunda derivada valuada con ellos queda:

$$V''\left(\frac{\ell}{2}\right) = 24\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{3}\right) = 24\,\frac{\ell}{6} = 4\ell > 0$$

por lo que hay un mínimo en $x = \frac{\ell}{2}$

$$V''\left(\frac{\ell}{6}\right) = 24\left(\frac{\ell}{6} - \frac{\ell}{3}\right) = -24\,\frac{\ell}{6} = -4\ell < 0$$

por lo que hay un máximo en $x = \frac{\ell}{6}$

ANIMACIÓN