FUNCIONES

La gran importancia que el concepto de función juega en las matemáticas se debe a que casi cada situación de la experiencia diaria es susceptible de ser interpretada como una función. Citaremos a continuación varios ejemplos simples en los cuales se exhibe la forma en que se pueden lograr tales interpretaciones y obtener funciones de ciertos conjuntos en otros. Al mismo tiempo iremos recordando la terminología y notación usuales.

Ejemplo

Sea A el conjunto de los alumnos de cierto grupo de una escuela, y B el conjunto de bancas que hay en un salón. Supongamos que a cada alumno se le ha asignado un lugar en el salón. Esto puede interpretarse como una función $A \to B$ en que a cada alumno (es decir, un elemento del conjunto A) se le asocia una determinada banca (es decir, un elemento del conjunto B). Convenimos que a varios alumnos se les puede asociar la misma banca, pero que a un mismo alumno no se le pueden asignar dos bancas distintas (Si esto último ocurriera no diríamos que se trata de una función de A en B)

Definición: Sea A y B conjuntos. El producto cartesiano de A y B, $A \times B$, es el conjunto de parejas ordenadas

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B \}$$

Ejemplos

5. Sean $A = \{ 1, 2, 3 \}$, $B = \{ a, b, \}$. Entonces

$$A \times B = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b,), (3, a), (3, b) \}$$

6. Sea $A = \{ 1, 2, \}$. Entonces

$$A \times A = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2,) \}$$

7. Sea N el conjunto de los números naturales. Entonces

$$N \times N = \{ (n, m) \mid n \in N, m \in N \}$$

8. Sea Z el conjunto de los números enteros. Entonces

$$Z \times Z = \{ (n, m) \mid n \in Z, m \in Z \}$$

9. Sea R el conjunto de los números reales. Entonces

$$R \times R = \left\{ \left(x,\ y \right) \middle| x \in R \quad \text{y} \quad \in R \right\} \text{ es el plano real}$$

RELACIONE S

Definición: Sea A y B conjuntos. Una relación entre A y B, es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$

FU N C I O N E S

Sean A y B conjuntos. Una función $f: A \to B$ es una relación R en $A \times B$ que satisface:

i) $D_R = A$; es decir, para toda $x \in A$ existe una pareja $\left(x,\ y \right)$ ó $\left(x,\ f(x) \right)$.

ii) Cada elemento $x \in A$ tiene asociado uno solo de B; es decir, $\left(x,\ y_1 \right)$ y $\left(x,\ y_2 \right)$ implica $y_1 = y_2$

Una notación alternativa para una función $f: A \to B$ es $A \xrightarrow{f} B$.
El conjunto A es llamado el dominio de la función, el conjunto B es llamado el codominio de la función y para cada $x \in A$, denotamos con $f(x)$ al elemento B que le corresponde: es decir $\left(x,\ f(x) \right) \in R$. Llamamos a $f(x)$ la imagen del elemento x.

Definición: La imagen* de una función $f: A \to B$ es el conjunto

$$Im\ f = \left\{ b \in B \middle| \text{ existe a} \in A \text{ con } f(a) = b \right\}$$

Se tiene que $Im\ f$ es un subconjunto propio o impropio del codominio de la función.
*También llamado recorrido o rango.

Ejemplos

1. Sean A un conjunto y sea $f: A \to A$ la función dada por $f(x) = x$ para toda $x \in A$.

2. Sean A un conjunto de las personas y B el conjunto de las naciones. La relación $R \subset A \times B$ de las parejas $(x,\ y)$ tales que, $''x$ tiene nacionalidad correspondiente a y'', es una función $f:\ A \to B$.

3. Sean $f:\ Z \to N$ dada por $f(n) = n^2 + 1$ para toda $n \in Z$.

Es inmediato de la definición que dos funciones $f:\ A \to B$ y $g:\ C \to D$ son iguales si y sólo si,

a) $A = C$;

b) $B = D$;

c) $f(x) = g(x)$ para toda $x \in A$

FUNCIONES INYECTIVAS SUPRAYECTIVAS Y BIYECTIVAS

Definiciones: Sea $f:\ A \to B$ una función de un conjunto A en un conjunto B . Se tienen las siguientes definiciones:

1. La función f es inyectiva si, dados dos elementos arbitrarios a , a' en A tales que $a \neq a'$, entonces $f(a) \neq f(a')$. Dicho en otros términos, los valores de la función **nunca se repiten**.

2. La función f es suprayectiva si, dado un elemento arbitrario b en B existe un elemento a en A tal que $f(a) = b$. Esto es, el recorrido, rango o imagen resulta ser **igual al codominio** de la función.

Si una función es inyectiva y suprayectiva entonces se dice que es biyectiva.

Ejemplos

1. Sea $f:\ R \to R$ dada por $f(x) = x^2$, entonces f no es inyectiva ya que $f(1) = f(-1)$; tampoco es suprayectiva ya que $f(x) \geq 0$ y por lo tanto ningún elemento negativo está en la imagen de f .

2. Sea $f:\ Z \to Z$ dada por $f(n) = 2n$, entonces f es inyectiva porque $f(n) = f(m)$ implica $2n = 2m$ implica $n = m$.

La función no es suprayectiva ya que los números enteros impares no están en la imagen f .

3. Sea $f: Z \rightarrow Z$ dada por $f(n) = \left[\frac{n}{2} \right]$, entonces f es suprayectiva ya que si $m \in Z$ tenemos $m = \left[\frac{2n}{2} \right] = f(2m)$; la función no es inyectiva puesto que $f(2n) = \left[\frac{2n}{2} \right] = \left[\frac{2n+1}{2} \right] = f(2n+1)$.

4. Sea A un conjunto arbitrario. La función idéntica $I_A: A \rightarrow A$ es biyectiva.