COMPOSICIÓN

DE

FUNCIONES

(TEXTO PARA UN OBJETO DE APRENDIZAJE)

ING. ALEJANDRA VARGAS ESPINOZA DE LOS MONTEROS
ING. SERGIO CARLOS CRAIL CORZAS

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

La composición es una operación entre funciones que se establece de la siguiente manera:

Dadas dos funciones f y g, se define como la composición de la función f con la función g, a la función denotada $f \circ g$ (léase f composición g), cuya regla de correspondencia es

$$(f \circ g)(x) = f [g (x)]$$

donde su dominio está representado por el conjunto

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \,\middle|\, x \in D_g \; ; \; g (x) \in D_f \right\}$$

Para obtener la regla de correspondencia de la función $f \circ g$, según la definición anterior, basta con sustituir la función g en la variable independiente de la función f.

Así por ejemplo, sean las funciones $f (x) = 4x^2 - 1$ y $g (x) = \sqrt{x}$, entonces, la regla de la función $f \circ g$ se obtiene mediante la siguiente sustitución

$(f \circ g)(x) = f [g (x)]$, por lo que

$(f \circ g)(x) = f \left[\sqrt{x} \right]$, entonces

$(f \circ g)(x) = 4x - 1$

Del mismo modo resolvamos el siguiente ejemplo:

Escribir en el paréntesis la letra de la columna de la derecha que corresponda a la regla de correspondencia de la composición indicada, para

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad g(x) = \sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad h(x) = \frac{1}{x-1}$$

1).- $(f \circ g)(x) =$ .... (   )

2).- $(g \circ h)(x) =$ .... (   )

3).- $(h \circ g)(x) =$ .... (   )

4).- $(g \circ f)(x) =$ .... (   )

5).- $(f \circ h)(x) =$ .... (   )

a) $\sqrt{x^2 + 1}$

b) $x + 1$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$

d) $\sqrt{x^2 + 2}$

e) $\dfrac{1}{x}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

g) $\sqrt{x+1}$

Para entender mejor cómo se obtiene el dominio y el recorrido de la composición, recurramos a la notación funcional, pues la definición se expresa en estos términos.

Notación Funcional.- Es una simbología que sirve para representar sucintamente una función, se expresa de la siguiente manera

$$y = w\,(x)$$

Donde:

$\boldsymbol{w}$ Representa la regla de correspondencia de la función.

$\boldsymbol{x}$ Indica el dominio de la función w, o bien, a la variable independiente.

$\boldsymbol{w\,(x)}$ Representa al recorrido de la función w, indica los valores de la variable dependiente.

Entonces, en estos términos, el significado de

$$f\,[\;g\,(x)\;]$$

Es que el dominio de la función resultante, es un subconjunto, propio o impropio, del dominio de la función g, y que su recorrido es un subconjunto propio o impropio de la función f.

De lo anterior, es importante tener presente que la condición para que se pueda efectuar esta operación es el cumplimiento de

$$R_g \cap D_f \neq \varnothing$$

A partir de la condición anterior, indicar si es posible o no obtener la composición entre las funciones que se indican:

Si:

$$g(x) = -x^2$$

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

$$h(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$i(x) = \sqrt{1-(x-2)^2}$$

$$j(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$k(x) = \sqrt{-x}$$

Entonces:

a) $f \circ g$; no es posible

b) $g \circ f$; sí es posible

c) $i \circ h$; no es posible

d) $h \circ i$; sí es posible

e) $j \circ k$; sí es posible

f) $k \circ j$; no es posible

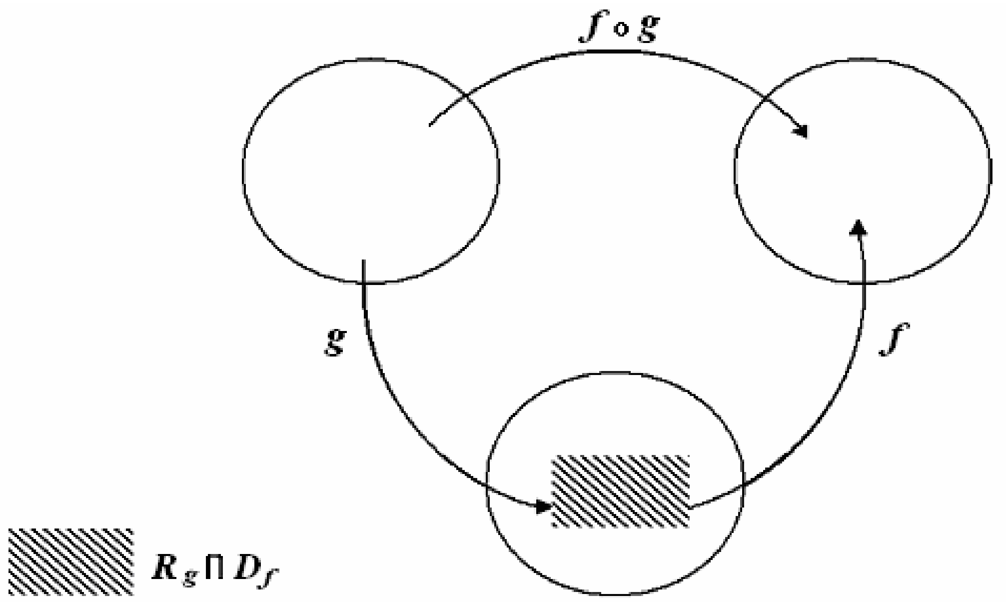
g) $k \circ g$; sí es posible

h) $g \circ k$; sí es posible

i) $f \circ j$; sí es posible

j) $i \circ g$; no es posible

Para visualizar mejor cómo se obtiene el dominio y el recorrido de la función composición $f \circ g$, recurramos a su representación en un diagrama de Venn.

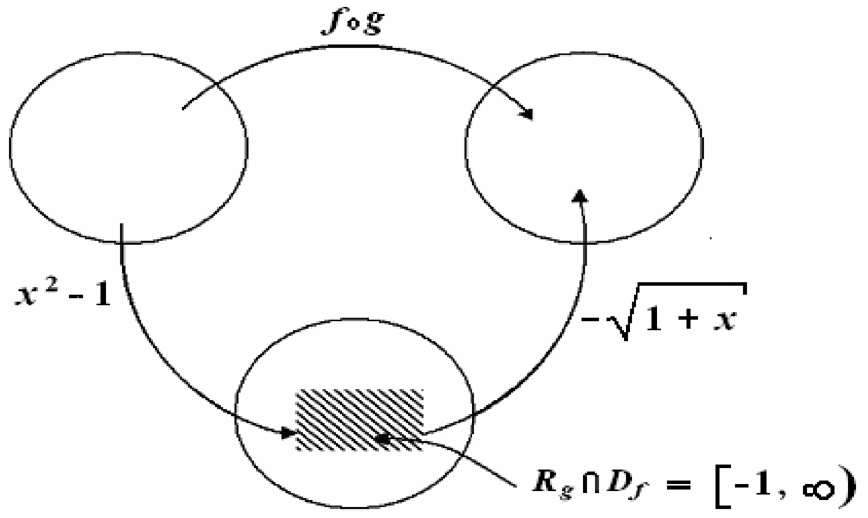


Podemos ver que el $D_{f \circ g}$ (dominio de $f \circ g$) lo formarán aquellos elementos del D_g para los cuales, al sustituirlos en la función g, el resultado pertenece al conjunto $R_g \cap D_f$.

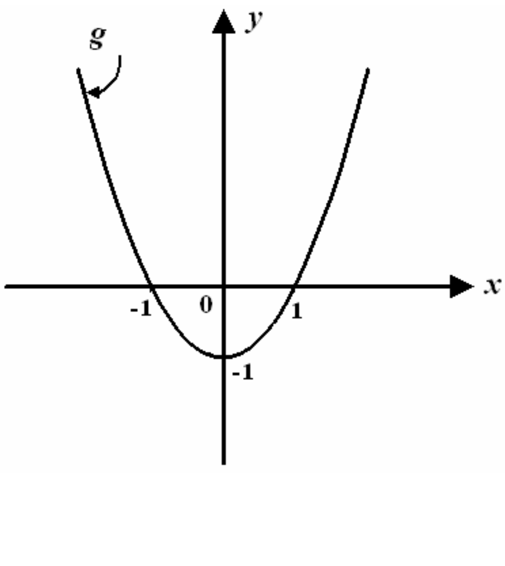
Para obtener el $R_{f \circ g}$ (recorrido de $f \circ g$), analizamos los valores que obtenemos de la función f, cuando la valuamos en todos los elementos del conjunto $R_g \cap D_f$.

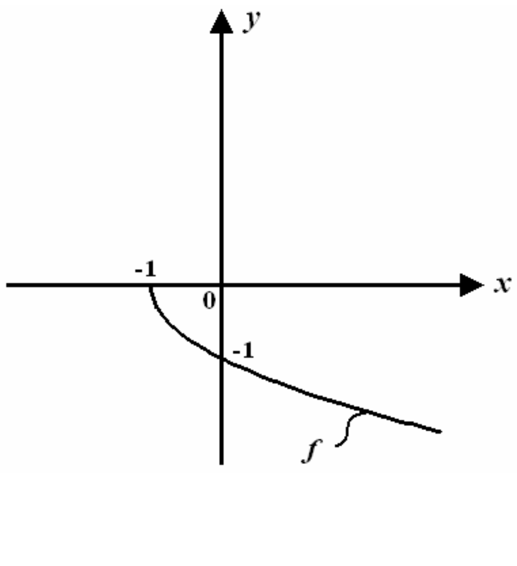
Ejemplo.- Si $f\,(x) = -\sqrt{1 + x}$ y $g\,(x) = x^2 - 1$, obtener la función $f \circ g$, y trazar su gráfica.

Si hacemos la representación correspondiente en un diagrama de Venn



Si además trazamos las gráficas de las funciones involucradas:





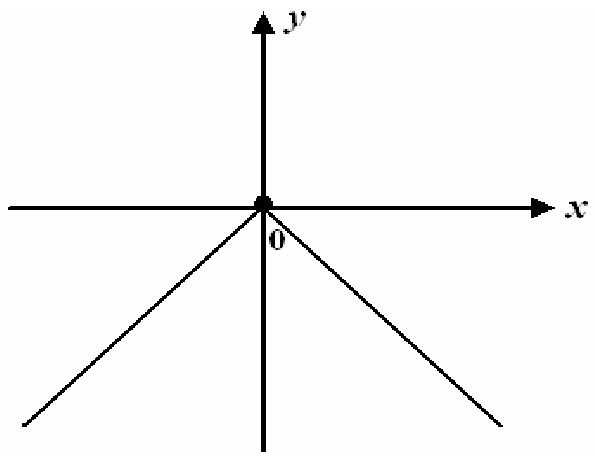
El $D_{f \circ g}$ lo formarán aquellos elementos del D_g tales que al valuarlos en la función g, se encuentren en el conjunto $[\,-1\,,\ \infty\,)$. Podemos darnos cuenta que ese conjunto es IR.

El $R_{f \circ g}$ estará formado por aquellos valores que se obtienen de sustituir en la función f , los elementos del conjunto $[\,-1\,,\ \infty\,)$. El resultado de esta sustituciòn es el conjunto $(\,-\infty\,,\ \mathbf{0}\,]$

Al obtener la regla de correspondencia de la función $f \circ g$ queda

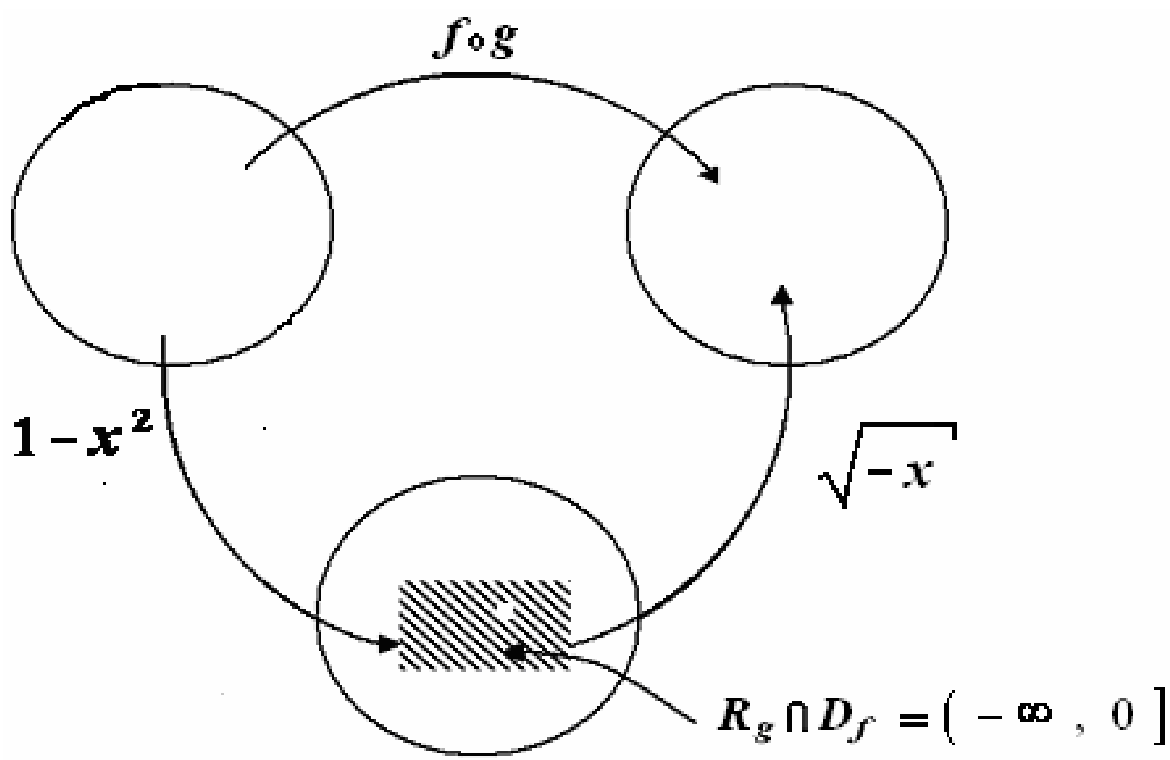
$$f\,[\,g\,(x)\,] = f\left[\,x^2 - 1\,\right] = -\sqrt{1 + \left(\,x^2 - 1\,\right)} = -\sqrt{x^2}$$

De lo analizado antes, concluímos que la regla de correspondencia de la función $f \circ g$ no puede ser $-x$, sino $-\sqrt{x^2}$ cuya gráfica será.



Ejemplo.- Si $f\,(x) = \sqrt{-x}$ y $g\,(x) = 1 - x^2$, obtener la función $f \circ g$, y trazar su gráfica.

Si hacemos la representación en un diagrama de Venn.



Sea

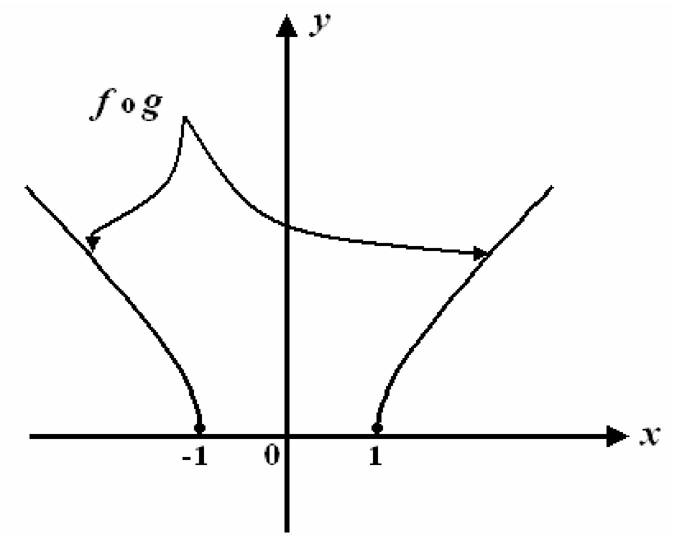
$$R_g \cap D_f = (\, -\infty \;,\; \mathbf{0} \,]$$

El dominio de $f \circ g$ lo formarán aquellos elementos del dominio de g tal que al sustituirlos en ella, se obtienen $(\, -\infty \;,\; \mathbf{0} \,]$; vemos que esos elementos son $(\, -\infty \;,\; -\mathbf{1} \,] \cup [\, \mathbf{1} \,,\, \infty \,)$.

El recorrido de $f \circ g$ estará formado por todos los valores que se obtienen al sustituir cada elemento del conjunto $\left(-\infty \,,\, \mathbf{0} \right]$ en la función f ; el resultado que se obtiene es $\left[\mathbf{0} \,,\, \infty \right)$.

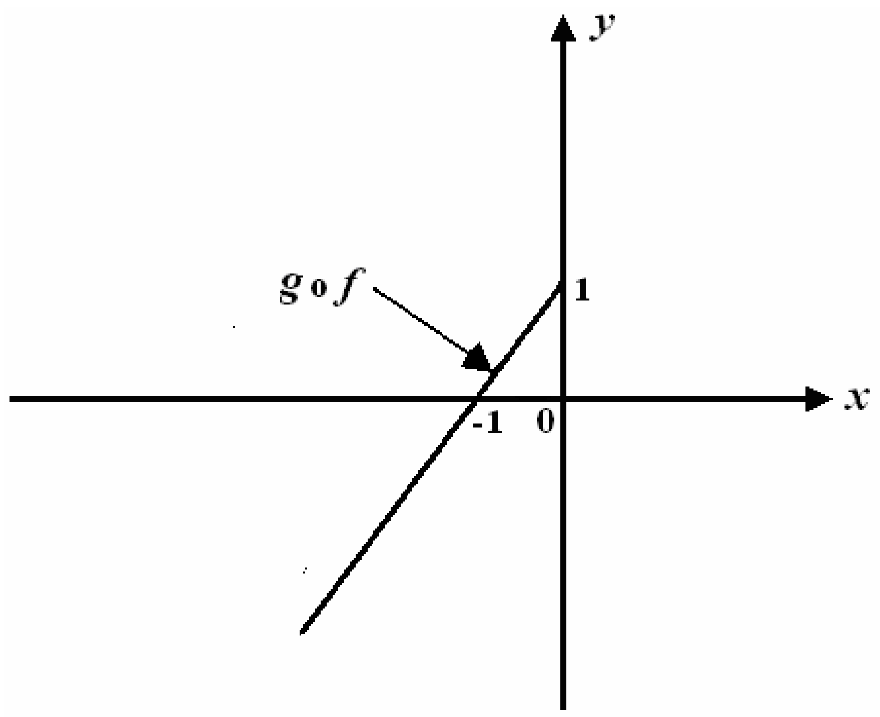
La regla de correspondencia de la función $f \circ g$ está dada por

$$\left(f \circ g \right)(x) = f\left[g(x) \right] = \left[1 - x^2 \right] = \sqrt{x^2 - 1} \,,$$ cuya gráfica es:



Ejemplo.- Para las funciones del ejercicio anterior obtener $g \circ f$, así como trazar su gráfica.

Sea $R_f \cap D_g = [\,\mathbf{0}\,,\,\infty\,)$, entonces el $D_{g \circ f} = (\,-\infty\,,\,\mathbf{0}\,]$ y el $R_{g \circ f} = (\,-\infty\,,\,\mathbf{1}\,]$, entonces $(\,g \circ f\,)(x) = g\left[\,\sqrt{-x}\,\right] = 1 + x$ cuya gráfica es



Como se pude observar la operación composición no cumple la conmutatividad

$$\boxed{f \circ g \neq g \circ f}$$

salvo casos particulares.