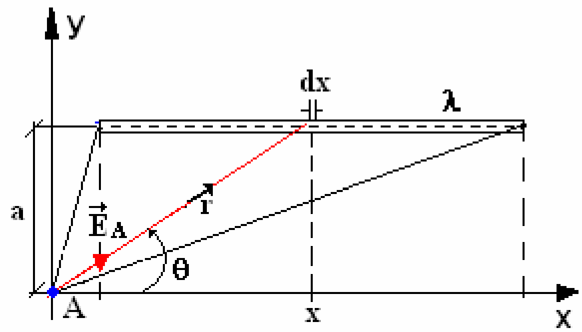
Cálculo del campo eléctrico debido a un segmento de línea cargada.

FMPR.

La figura muestra un segmento de línea con distribución líneal uniforme de carga λ y un punto cualquiera A separado una distancia “a”del eje del segmento.



Imaginemos el segmento dividido en pequeños segmentos infinitesimales dx. La carga dq de un segmento dx está dada por dq= λdx. La distancia “r” de un segmento en la posición x hasta el punto A es $r = \sqrt{x^2 + a^2}$. La contribución $d\vec{E}$ al campo en A, debido a este segmento está dado por:

$$d\vec{E} = \frac{\bar{F}}{q_0}\hat{r} = k\frac{dq \cdot q_0}{q_0 \cdot r^2}\hat{r} = k\frac{dq}{r^2}\hat{r} = k\frac{\lambda \cdot dx}{r^2}\hat{r} \quad \text{Como } \hat{r} = +\frac{x}{r}\hat{\imath} + \frac{a}{r}\hat{\jmath}$$

$$d\vec{E} = k\frac{\lambda \cdot dx}{r^2}\left(+\frac{x}{r}\hat{\imath} + \frac{a}{r}\hat{\jmath}\right)$$

$$d\vec{E} = \left(\frac{k \cdot \lambda \cdot x \cdot dx}{r^3}\hat{\imath} + \frac{k \cdot \lambda \cdot a \cdot dx}{r^3}\hat{\jmath}\right)$$

$$d\vec{E} = +dE_x\hat{\imath} + dE_y\hat{\jmath}$$

Integrando $\bar{E} = \int dE_x \cdot \hat{\imath} + \int dE_y \cdot \hat{\jmath}$

Para hallar el campo total en el punto A necesitamos sumar (integrar) las contribuciones de todos los segmentos.

Integrando primero la componente en x.

$$E_x = \int_{x_1}^{x_2} dE_x = \int_{x_1}^{x_2} k\frac{\lambda \cdot x \cdot dx}{r^3} = k \cdot \lambda \int_{x_1}^{x_2} \frac{x \cdot dx}{r^3}$$

Como $r = \left(x^2 + a^2\right)^{1/2}; \quad r^3 = \left(x^2 + a^2\right)^{3/2};$

Sustituyendo $E_x = k \cdot \lambda \int_{x_1}^{x_2} \frac{x \cdot dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}}$

Realizando un cambio de variable $u = x^2 + a^2; \quad du = 2x \cdot dx$

Por lo tanto

$$E_x = k\lambda\int_{x_1}^{x_2} \frac{du}{2}\cdot\frac{1}{u^{3/2}}\ ; \qquad E_x = k\frac{\lambda}{2}\int_{x_1}^{x_2} u^{-3/2}\cdot du = k\frac{\lambda}{2}\left[\frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$E_x = k\frac{\lambda}{2}\left[-2u^{-1/2}\right]_{x_1}^{x_2} = k\lambda\left[-\frac{1}{u^{1/2}}\right]_{x_1}^{x_2};$$

$$E_x = k\lambda\left[\frac{1}{(x_1^2+a^2)^{1/2}} - \frac{1}{\left(x_2^2+a^2\right)^{1/2}}\right]\times\frac{a}{a}$$

$$E_X = k\frac{\lambda}{a}\left[\mathrm{sen}\theta_1 - \mathrm{sen}\theta_2\right]$$

Integrando la componente en y

$$E_y = \int_{x_1}^{x_2} dE_y = \int_{x_1}^{x_2} k\frac{\lambda\cdot a\cdot dx}{r^3}$$

$$E_y = k\cdot\lambda\int_{x_1}^{x_2}\frac{a\cdot dx}{r^3} = k\cdot\lambda\cdot a\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$$ctg\theta = \frac{x}{a};\quad x = a\cdot ctg\theta;\quad dx = -a\csc^2\theta\cdot d\theta$$

$$E_y = k\cdot\lambda\cdot a\int_{x_1}^{x_2}\frac{-a\cdot\csc^2\theta\cdot d\theta}{\left(a^2ctg^2\theta + a^2\right)^{3/2}}$$

$$E_y = k\cdot\lambda\cdot a\int_{x_1}^{x_2} -\frac{a\cdot\csc^2\theta\cdot d\theta}{a^3\left(ctg^2\theta + 1\right)^{3/2}}$$

Recordando que $(\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1)(\frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta});$

$$\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\mathrm{sen}^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}^2\theta} = \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta};\quad 1+\cot^2\theta = \csc^2\theta;$$

$$E_y = k\cdot\lambda\cdot a\int_{x_1}^{x_2} -\frac{a\cdot\csc^2\theta\cdot d\theta}{a^3\left(\csc^2\theta\right)^{3/2}}$$

$$E_y = k\cdot\lambda\cdot a\int_{x_1}^{x_2} -\frac{\csc^2\theta\cdot d\theta}{a^2\left(\csc^3\theta\right)} = k\cdot\lambda\cdot a\int_{x_1}^{x_2} -\frac{d\theta}{a^2\left(\csc\theta\right)}$$

$$E_y = k\cdot\lambda\cdot\frac{a}{a^2}\int_{x_1}^{x_2} -\mathrm{sen}\theta\cdot d\theta$$

$$E_y = k\cdot\frac{\lambda}{a}\int_{x_1}^{x_2} -\mathrm{sen}\theta\cdot d\theta = k\cdot\lambda\cdot\frac{1}{a}\left[\cos\theta\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$E_Y = k\cdot\lambda\cdot\frac{1}{a}\left[\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right]$$