ANTECEDENTES DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO “OPERADOR NABLA”.

Contenido

OPERADOR NABLA.

El operador NABLA, el cual se escribe $\vec{\nabla}$, es el operador diferencial del vector. En coordenadas cartesianas,

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z$$

Este operador diferencial del vector, también llamado operador gradiente, no es un vector en sí mismo, pero cuando, por ejemplo, opera sobre una función escalar, genera un vector. Este operador es útil para definir:

- El gradiente de un escalar V, el cual se escribe ∇V.
- La divergencia de un vector $\vec{A}$, la cual se escribe $\nabla \cdot \vec{A}$.
- El rotacional de un vector $\vec{A}$, el cual se escribe $\nabla \times \vec{A}$.
- El laplaciano de un escalar V, el cual se escribe $\nabla^2 V$.

Para obtener ∇ en términos de ρ, ϕ y z, se debe recordar que:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\phi = \frac{y}{x}$$

De ahí que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\phi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{sen\phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = sen\phi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\cos\phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

De lo anterior se obtiene $\vec{\nabla}$, en coordenadas cilíndricas.

$$\vec{\nabla} = a_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + a_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + a_z \frac{\partial}{\partial z}$$

De igual forma, para obtener ∇ en términos de términos de r, θ y ϕ, usamos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \qquad \tan\phi = \frac{y}{x}$$

Para obtener

$$\frac{\partial}{\partial x} = sen\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{sen\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = sen\theta sen\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta sen\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{sen\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

De lo anterior se obtiene como resultado que ∇ en coordenadas esféricas

$$\nabla = a_r\frac{\partial}{\partial r} + a_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + a_\phi\frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

GRADIENTE DE UN VECTOR.

El gradiente de un vector escalar V es un vector que representa tanto la magnitud como la dirección de la máxima rapidez de incremento espacial de V.

Una expresión matemática para este gradiente puede obtenerse evaluando la diferencia en el campo dV entre los puntos P_1y P_2 , donde V_1, V_2y V_3 son contornos en los que V es constante. Con base en el cálculo,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}a_x + \frac{\partial V}{\partial y}a_y + \frac{\partial V}{\partial z}a_z\right)\cdot\left(dxa_x + dya_y + dza_z\right)$$

De donde obtenemos

$$G = \frac{\partial V}{\partial x}a_x + \frac{\partial V}{\partial y}a_y + \frac{\partial V}{\partial z}a_z$$

$$\therefore$$

$$dV = G\cdot dl = G\cos\theta dl$$

$$\frac{dV}{dl} = G\cos\theta$$

Donde dl es el desplazamiento diferencial de P_1 a P_2 y θ es el ángulo entre G y dl. De $\frac{dV}{dl} = G\cos\theta$ se deduce que $\frac{dV}{dl}$ es máximo cuando θ=0; esto es, cuando dl está en la dirección de G. En consecuencia,

$$\left.\frac{dV}{dl}\right|_{\max} = \frac{dV}{dn}G$$

Donde $\frac{dV}{dn}$ es la derivada normal. Así, la magnitud y dirección de G son las de la máxima rapidez de cambio de V. Por definición tenemos que G es el gradiente de V. De este modo:

$$grad\ V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z$$

El gradiente de V puede expresarse en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. De esta forma podemos obtener lo siguiente:

En coordenadas cartesianas:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\nabla = \frac{\partial V}{\partial \rho} a_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi} a_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} a_z$$

En coordenadas esféricas:

$$\nabla = \frac{\partial V}{\partial r} a_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} a_\theta + \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} a_\phi$$

Basándonos en el cálculo, el gradiente se puede aplicar de la siguiente forma:

a) $\nabla(V + U) = \nabla V + \nabla U$
b) $\nabla(VU) = V\nabla U + U\nabla V$
c) $\nabla\left[\frac{V}{U}\right] = \frac{U\nabla V - V\nabla U}{U^2}$
d) $\nabla V^n = nV^{n-1}\nabla V$

Donde U y V son escalares y n es un entero.

Las propiedades fundamentales del gradiente son las siguientes:

1. La magnitud de ∇V equivale a la máxima rapidez de cambio en V por unidad de distancia.
2. ∇V apunta en la dirección de la máxima rapidez de cambio en V.
3. ∇V en cualquier punto es perpendicular a la superficie constante V que pasa por ese punto.
4. La proyección o componente de ∇V en la dirección de un vector unitario **a** es $\nabla V \cdot a$ y se llama derivada direccional de V a lo largo de **a.** Ésta es la rapidez de cambio de V en la dirección de **a.**
5. Si $\vec{A} = \nabla V$, se dice que V es el potencial escalar de $\vec{A}$.

DIVERGENCIA DE UN VECTOR Y TEOREMA DE LA DIVERGENCIA.

La divergencia de $\vec{A}$ en un punto dado P es el flujo hacia afuera por unidad de volumen a medida que el volumen se contrae alrededor de P.

Por tanto

$$div\ \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta v}$$

Donde Δv es el volumen encerrado por la superficie cerrada S en la que se ubica P. Físicamente la divergencia del campo vectorial $\vec{A}$ en un punto dado puede considerarse una medida del grado en que ese campo diverge o emana de tal punto.

La divergencia de un campo vectorial en un punto P es positiva cuando el vector diverge o se aparta de P. Por lo contrario cuando el vector converge hacia el punto P, tenemos un campo vectorial con divergencia negativa. También podemos obtener un campo vectorial con divergencia cero hacia un punto P.

De la definición $div\ \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta v}$ se puede obtener una expresión para $\nabla \cdot \vec{A}$ en coordenadas cartesianas. Supóngase que se desea evaluar la divergencia de un campo vectorial **A** en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$; sea que ese punto esté encerrado por un volumen diferencial, como se muestra en la figura1.

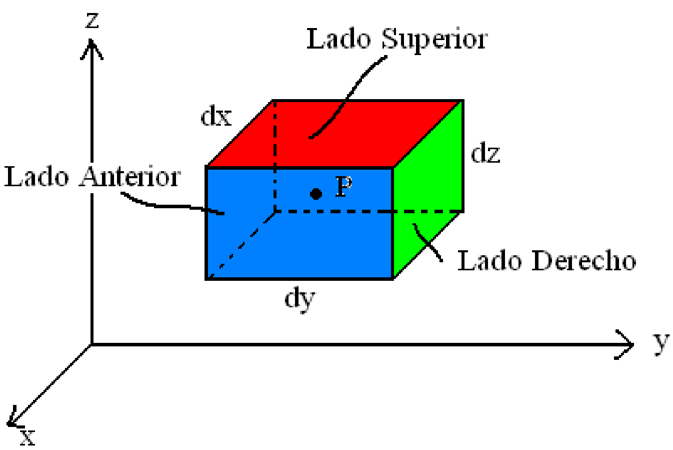


Figura1.

La integral de superficie se obtiene de

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \left(\int_{Anterior} + \int_{Posterior} + \int_{Izquierdo} + \int_{Derecho} + \int_{superior} + \int_{inferior} \right) \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

Un desarrollo tridimensional en series de Taylor DE A_x alrededor de P es:

$$A_x(x,y,z) = A_x(x_0,y_0,z_0) + (x-x_0)\left.\frac{\partial A_x}{\partial x}\right|_P + (y-y_0)\left.\frac{\partial A_x}{\partial y}\right|_P + (z-z_0)\left.\frac{\partial A_x}{\partial z}\right|_P + termonos\ de\ orden\ superior$$

respecto del lado anterior:

$$x = x_0 + \frac{dx}{2} \quad y \quad dS = dydz a_x \quad Así,$$

$$\int_{Anterior} \vec{A}\cdot d\vec{S} = dydz\left[A_x(x_0 + y_0 + z_0) + \frac{dx}{2}\left.\frac{\partial A_x}{\partial x}\right|_P \right] + ter\min os\ de\ orden\ superior$$

Respecto al lado posterior:

$$x = x_0 - \frac{dx}{2} \quad y \quad dS = dydz(-a_x) \quad Así,$$

$$\int_{Anterior} \vec{A}\cdot d\vec{S} = -dydz\left[A_x(x_0 + y_0 + z_0) - \frac{dx}{2}\left.\frac{\partial A_x}{\partial x}\right|_P \right] + ter\min os\ de\ orden\ superior$$

En consecuencia

$$\int_{Anterior} \vec{A}\cdot d\vec{S} + \int_{Posterior} \vec{A}\cdot d\vec{S} = dxdydz\left.\frac{\partial A_x}{\partial x}\right|_P + ter\min os\ de\ orden\ superior$$

Siguiendo pasos análogos, obtenemos:

$$\int_{Izquierdo} \vec{A}\cdot d\vec{S} + \int_{Derecho} \vec{A}\cdot d\vec{S} = dxdydz\left.\frac{\partial A_y}{\partial y}\right|_P + ter\min os\ de\ orden\ superior$$

Y

$$\int_{Superior} \vec{A}\cdot d\vec{S} + \int_{Inferior} \vec{A}\cdot d\vec{S} = dxdydz\left.\frac{\partial A_z}{\partial z}\right|_P + ter\min os\ de\ orden\ superior$$

Considerando las ecuaciones anteriores y sustituyéndola en

$$\nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta v}$$

Y considerando que Δv=dxdydz, obtenemos

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta v} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)\Bigg|_{en\ P}$$

Puesto que los términos de orden superior tienden a cero conforme $\Delta v \to 0$. En un sistema cartesiano, así, la divergencia de A en un punto P(x_0, y_0, z_0) está dada por:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

Para coordenadas cilíndricas la divergencia de A en un punto P, resulta:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho A_\rho \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

En Coordenadas esféricas:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 A_r \right) + \frac{1}{r\ sen\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(A_\theta sen\theta \right) + \frac{1}{r\ sen\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Las siguientes son las propiedades de la divergencia de un campo vectorial:

1. Produce un campo escalar (ya que está implicado el producto escalar)
2. La divergencia de un escalar V, div V, carece de sentido.
3. $\nabla \cdot \left(\vec{A} + \vec{B} \right) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}$
4. $\nabla \cdot \left(V\vec{A} \right) = V\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla V$

Con base en la definición de la divergencia de $\vec{A}$ en la ecuación $div\ \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta v}$, cabe esperar que:

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dv$$

Esto se conoce como teorema de la divergencia, o teorema de Gauss-Ostrogradsky.

El teorema de la divergencia establece que el flujo total hacia afuera de un campo vectorial A a través de la superficie cerrada S, equivale a la integral de volumen de la divergencia de A.

Para comprobar el teorema de la divergencia, el volumen "v" se subdivide en gran número de pequeñas celdas. Si la celda de orden "k" tiene un volumen ∇v_k y está circunscrita por la superficie S_k.

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \sum_k \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \sum_k \frac{\oint_{S_k} \vec{A}\cdot d\vec{S}}{\Delta v_k}\Delta v_k$$

Puesto que el flujo hacia afuera de una celda es para algunas celdas vecinas un flujo hacia adentro, hay anulación en la superficie interior, de modo que la suma de las integrales de superficie sobre la de S_k es igual a la integral de superficie sobre la superficie S. La adopción del límite del miembro derecho de la ecuación $\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \sum_k \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \sum_k \frac{\oint_{S_k} \vec{A}\cdot d\vec{S}}{\Delta v_k}\Delta v_k$ y la incorporación de la ecuación $div\ \vec{A} = \nabla\cdot\vec{A} = \lim_{\Delta v\to 0} \frac{\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}}{\Delta v}$ resulta en:

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{A}\, dv$$

Es decir, el teorema de la divergencia. Este teorema se aplica a todo volumen "v" circunscrito por la superficie cerrada S, siempre que $\vec{A}$ y $\nabla\cdot\vec{A}$ sean continuos en la región.

ROTACIONAL DE UN VECTOR Y TEOREMA DE STOKES.

Se ha definido a la circulación de un campo vectorial $\vec{A}$ alrededor de una trayectoria cerrada "L" como la integral $\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l}$

El rotacional de $\vec{A}$ es un vector axial cuya magnitud es la circulación máxima de $\vec{A}$ por unidad de área conforme el área tiende a cero y cuya dirección es la dirección normal de área cuando el área se orienta de tal forma que de ello resulta la circulación máxima.

Esto es:

$$rot\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left(\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \right) a_n \atop \max$$

Donde el área ΔS está circunscrita por la curva L y a_n es el vector unitario normal a la superficie ΔS, el cual se determina aplicando la regla de la mano derecha.

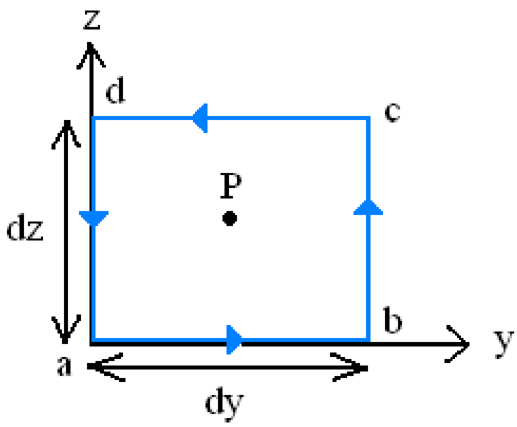


Figura 2.

A fin de obtener una expresión para $\nabla \times \vec{A}$ a partir de la definición $rot\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left(\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \right) a_n \atop \max$, considérese el área diferencial en el plano "yz" de la figura 2. La integral de línea, de la definición, se obtiene de la siguiente forma:

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \left(\int_{ab} + \int_{bc} + \int_{cd} + \int_{da} \right) \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Se desarrollan entonces las componentes del campo en desarrollo en series de Taylor alrededor del punto central $P(x_0, y_0, z_0)$ y se evalúa la ecuación. En el lado ab, $dl=dy\ a_y$ y $z=z_0 - dz/2$, de modo que :

$$\int_{ab} \vec{A} \cdot d\vec{l} = dy \left[A_y(x_0, y_0, z_0) - \frac{dz}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \bigg|_P \right]$$

En el lado bc, $dl=dz\ a_z$ y $y=y_0 + dy/2$, de modo que :

$$\int_{bc} \vec{A} \cdot d\vec{l} = dz \left[A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{dy}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \bigg|_P \right]$$

En el lado cd, dl=dy a_y y z=z_0 +dz/2, de modo que :

$$\int_{cd} \vec{A}\cdot d\vec{l} = -dy\left[A_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{dz}{2}\frac{\partial A_y}{\partial z}\bigg|_P \right]$$

En el lado da, dl=dz a_z y z=y_0 -dy/2, de modo que :

$$\int_{da} \vec{A}\cdot d\vec{l} = -dz\left[Az(x_0, y_0, z_0) - \frac{dy}{2}\frac{\partial A_z}{\partial y}\bigg|_P \right]$$

La sustitución de las ecuaciones anteriores en $\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \left(\int_{ab} + \int_{bc} + \int_{cd} + \int_{da}\right)\vec{A}\cdot d\vec{l}$ y considerando ΔS=dy dz, resulta que:

$$\lim_{\Delta S\to 0} \oint_L \frac{\vec{A}\cdot d\vec{l}}{\Delta S} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_Y}{\partial z} \quad o \quad (rot\, A)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_Y}{\partial z}$$

Las componentes "y" y "x" del rotacional de $\vec{A}$ pueden hallarse de la misma manera, Así obtenemos:

$$(rot\, A)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$(rot\, A)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

La definición de ∇X $\vec{A}$ es independiente del sistema de coordenadas. En coordenadas cartesianas, el rotacional de $\vec{A}$ se encuentra fácilmente mediante:

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \qquad o$$

$$\nabla\times\vec{A} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]a_x + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]a_y + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]a_z$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} a_\rho & \rho a_\phi & a_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \qquad o$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]a_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]a_\phi \frac{1}{\rho} + \left[\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right]a_z$$

En coordenadas esféricas:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 sen\theta}\begin{vmatrix} a_r & ra_\theta & rsen\theta a_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & rsen\theta A_\phi \end{vmatrix} \qquad o$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{rsen\theta}\left[\frac{\partial(A_\phi sen\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]a_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]a_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]a_\theta$$

Las siguientes son las propiedades del rotacional:

1. El rotacional de un campo vectorial es otro campo vectorial.
2. El rotacional de un campo escalar V, $\nabla \times V$, carece de sentido.
3. $\nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B}$
4. $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla\vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$
5. $\nabla \times (V\vec{A}) = V\nabla \times \vec{A} + \nabla V \times \vec{A}$
6. La divergencia del rotacional de un campo vectorial tiende a cero, esto es: $\nabla \cdot (V \times \vec{A}) = 0$
7. El rotacional del gradiente de un campo escalar tiende a cero, esto es, $\nabla \times \nabla V = 0$

El significado físico del rotacional de un campo vectorial proporciona el valor máximo de la circulación del campo por unidad de área (o densidad de circulación) e indica la dirección a lo largo de la que ocurre este valor máximo. El rotacional de un campo vectorial $\vec{A}$ en un punto P puede considerarse una medida de la circulación o del grado en que el campo gira alrededor de P.

Así mismo, de la definición del rotacional de $\vec{A}$, cabe esperar que:

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot d\vec{S}$$

Esto se conoce como el teorema de STOKES.

El teorema de Stokes establece que la circulación de un campo vectorial $\vec{A}$ alrededor de una trayectoria (cerrada) L es igual a la integral de superficie del rotacional de $\vec{A}$ sobre la superficie abierta S circunscrita por L, siempre que $\vec{A}$ y $\nabla\times\vec{A}$ sean continuos en S.

LAPLACIANO DE UN ESCALAR.

El laplaciano de un campo escalar V, el cual se escribe $\nabla^2 V$, es la divergencia del gradiente de V.Así en coordenadas cartesianas, laplaciano

$$V = \nabla\cdot\nabla V = \nabla^2 V = \left[\frac{\partial}{\partial x}a_x + \frac{\partial}{\partial y}a_y + \frac{\partial}{\partial z}a_z\right]\cdot\left[\frac{\partial V}{\partial x}a_x + \frac{\partial V}{\partial y}a_y + \frac{\partial V}{\partial z}a_z\right]$$

Esto es,

$$\nabla^2 V = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}a_x + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}a_y + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}a_z\right]$$

Nótese que el laplaciano de un campo escalar es otro campo escalar.

El laplaciano de V en coordenadas cilíndricas es:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Y en coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$

Se dice que un campo escalar V es armónico en una región dada si su laplaciano tiende a cero en esa región, es decir, si

$$\nabla^2 V = 0$$

La ecuación $\nabla^2 V = 0$ se llama ecuación de LAPACE.

Como el operador ∇^2 es un operador escalar, también es posible definir el laplaciano de un vector $\vec{A}$. En este contexto $\nabla^2\vec{A}$ no debe interpretarse como la divergencia del gradiente de $\vec{A}$, lo cual carece de sentido, sino como el gradiente de la divergencia de $\vec{A}$ menos el rotacional del rotacional de $\vec{A}$.

Es decir:

$\nabla^2\vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times \nabla \times \vec{A}$

Esta ecuación puede aplicarse al cálculo de $\nabla^2\vec{A}$ en cualquier sistema de coordenadas, en el sistema cartesiano, y solo en él, la ecuación $\nabla^2\vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times \nabla \times \vec{A}$ se convierte en:

$$\nabla^2\vec{A} = \nabla^2 A_x a_x + \nabla^2 A_y a_y + \nabla^2 A_z a_z$$

EJERCICIOS.

Gradiente de un escalar.

1.- Halle el gradiente de los siguientes campos escalares.

a) $\vec{V} = e^{-z} sen 2x \cosh h$

b) $\vec{U} = \rho^2 z \cos 2\phi$

c) $\vec{W} = 10 r sen^2 \theta \cos\phi$

Solución:

a)

$$\nabla\vec{V} = \frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z$$

$$\nabla\vec{V} = 2e^{-z} \cos 2x \cosh y a_x + e^{-z} sen 2x senh y a_y - e^{-z} sen 2x \cosh y a_z$$

b)

$$\nabla\vec{U} = \frac{\partial U}{\partial \rho} a_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \phi} a_\phi + \frac{\partial U}{\partial z} a_z$$

$$\nabla\vec{U} = 2\rho z \cos 2\phi a_\rho - 2\rho z sen 2\phi a_\phi + \rho^2 \cos\phi a_z$$

c)

$$\nabla\vec{W} = \frac{\partial W}{\partial r} a_r + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta} a_\theta + \frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial W}{\partial \phi} a_\phi$$

$$\nabla\vec{W} = 10 sen^2\theta \cos\phi a_r + 10 sen 2\theta \cos\phi a_\theta - 10 sen\theta sen\phi a_\phi$$

2.- dado $\vec{W} = x^2y^2 + xyz$ calcule ∇W y la derivada direccional dW/dl en la dirección $3a_x + 4a_y + 12a_z$ en (2,-1,0).

Solución.

$$\nabla \vec{W} = \frac{\partial W}{\partial x} a_x + \frac{\partial W}{\partial y} a_y + \frac{\partial W}{\partial z} a_z$$

$$\nabla \vec{W} = \left(2xy^2 + yz\right) a_x + \left(2x^2 y + xz\right) a_y + (xy) a_z$$

En (2,-1,0) , $\nabla \vec{W}$ $=4a_x -8a_y -2a_z$

Por tanto,

$$\frac{dW}{dl} = \nabla \vec{W} \cdot a_l = (4,-8,-2) \cdot \frac{(3,4,12)}{13} = -\frac{44}{13}$$

Divergencia de un vector.

1.- Determine la divergencia de estos campos vectoriales.

a) $\vec{P} = x^2 yza_x + xza_z$

b) $\vec{Q} = \rho sen\phi a_\rho + \rho^2 za_\phi + z\cos\phi a_z$

c) $\vec{T} = \frac{1}{r^2}\cos\theta a_r + rsen\theta\cos\phi a_\theta + \cos\theta a_\phi$

Solución.

a)

$$\nabla \cdot \vec{P} = \frac{\partial}{\partial x} P_x + \frac{\partial}{\partial y} P_y + \frac{\partial}{\partial z} P_z$$

$$\nabla \cdot \vec{P} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 yz\right) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(xy)$$

$$\nabla \cdot \vec{P} = 2xyz + x$$

b)

$$\nabla \cdot \vec{Q} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho Q_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(Q_\phi\right) + \frac{\partial}{\partial z} Q_z$$

$$\nabla \cdot \vec{Q} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 sen\phi\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\rho^2 z + \frac{\partial}{\partial z}(z\cos\phi)$$

$$\nabla \cdot \vec{Q} = 2sen\phi + \cos\phi$$

c)

$$\nabla\cdot\vec{T}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2T_r\right)+\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(T_\theta sen\theta\right)+\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(T_\phi\right)$$

$$\nabla\cdot\vec{T}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta)+\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(rsen^2\theta\cos\phi\right)+\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\theta)$$

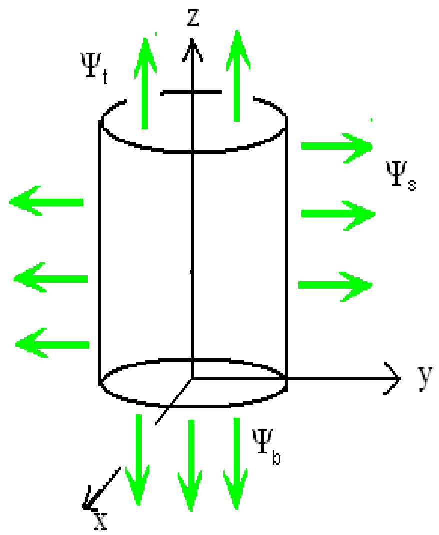
$$\nabla\cdot\vec{T}=0+\frac{1}{rsen\theta}2rsen\theta\cos\theta\cos\phi+0$$

$$\nabla\cdot\vec{T}=2\cos\theta\cos\phi$$

2.- Si $\vec{G}(r)=10e^{-2z}\left(\rho a_\rho+a_z\right)$, determine el flujo de G hacia afuera de la superficie entera del cilindro ρ=1 , 0 ≤ z ≤ 1.

Solución.

Si ψ es el flujo de G a través de la superficie dada como se muestra en la figura, entonces:



$$\Psi=\oint\vec{G}\cdot d\vec{S}=\Psi_t+\Psi_b+\Psi_s$$

Donde $\Psi_t+\Psi_b+\Psi_s$ son los flujos a través de la parte superior, inferior y superficie curva del cilindro.

Respecto de Ψ_t, $z=1,\ d\vec{S}=\rho d\rho d\phi a_z$. Así

$$\Psi_t = \int \vec{G}\cdot d\vec{S} = \int_{\rho=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} 10e^{-2}\rho d\rho d\phi = 10e^{-2}(2\pi)\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^1$$

$$\Psi_t = 10\pi e^{-2}$$

Respecto de Ψ_b, $z=0,\ d\vec{S} = \rho d\rho d\phi(-a_z)$. Así

$$\Psi_b = \int_b \vec{G}\cdot d\vec{S} = \int_{\rho=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} 10e^{0}\rho d\rho d\phi = 10(2\pi)\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^1$$

$$\Psi_b = 10\pi$$

Respecto de Ψ_s, $\rho = 1,\ d\vec{S} = \rho dz d\phi a_\rho$. Así

$$\Psi_s = \int_s \vec{G}\cdot d\vec{S} = \int_{z=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} 10e^{-2z}\rho^2 dz d\phi = 10(1)^2(2\pi)\frac{e^{-2z}}{-2}\Big|_0^1$$

$$\Psi_b = 10\pi\left(1-e^{-2}\right)$$

En consecuencia:

$$\Psi = \Psi_t + \Psi_b + \Psi_s = 10\pi e^{-2} - 10\pi - 10\pi\left(1-e^{-2}\right) = 0$$