FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
ASIGNATURA: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

SERIE TEMA 5
VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS

1. En la tienda Patín de abarrotes, tiene dos sitios diferentes en sus instalaciones donde los clientes pueden pagar cuando se marchan. Cada uno de estos sitios tiene dos cajas registradoras y dos empleados que atienden a los clientes cuando estos pagan. Sea X el número de caja registradora que se utiliza en un momento específico en el sitio 1 y Y el número de la caja registradora que se utiliza en el mismo momento en el sitio 2, la función masa de probabilidad conjunta está dada por

$f_{XY}(x\,,\,y)$		x		
		0	1	2
y	0	0.12	0.04	0.04
	1	0.08	0.19	0.05
	2	0.06	0.12	0.30

Obtener:

a) las distribuciones marginales de cada variable aleatoria.

b) La función de probabilidad $f_{X|Y=1}\left(X \mid Y=1\right)$ y $f_{Y|X=0}\left(Y \mid X=0\right)$

c) El valor esperado $E\left(X \mid Y=1\right)$ y $E\left(Y \mid X=0\right)$

d) La variancia $Var\left(X \mid Y=1\right)$ y $Var\left(Y \mid X=0\right)$

e) Si son variables aleatorias conjuntas independientes.

2. Sea la función

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k\;xy+1 & ; \quad 0<x<2\;,\;0<y<2 \\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

Determinar:

a) las funciones de densidad marginal para X y Y, con el valor de k adecuado para que sea función válida de densidad.

b) ¿Son X y Y variables aleatorias conjuntas independientes?

c) Calcular $P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2} \;\middle|\; Y\le 1\right)$

d) la covariancia de las variables aleatorias conjuntas.

3. Sean las variables aleatorias conjuntas X y Y con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k\;xy & ; \quad 0<x<3\;,\;0<y<2 \\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Calcular el valor esperado de $Z = X^2 + Y^2$

4. En una salón de clase en la DCB hay cuatro alumnos excelentes, tres alumnos muy buenos y dos alumnos buenos, para todas las asignaturas de cálculo. Se seleccionan dos alumnos al azar para otorgarles una beca. Sea X la variable aleatoria que representa el número de alumnos excelentes y sea Y la variable aleatoria que representa el número de alumnos muy buenos en la selección. Determinar:

a) la distribución de probabilidad conjunta.
b) las funciones marginales de probabilidad.
c) la función de probabilidad, si se sabe que en la selección aleatoria hay un alumno excelente.
d) la función masa de probabilidad, si se sabe que en la selección de alumnos ya se tiene un alumno muy bueno.
e) el promedio de alumnos muy buenos en la selección, si se sabe que ya hay uno excelente.
f) la esperanza de alumnos excelentes, dado que uno es muy bueno.
g) la covariancia entre las variables aleatorias conjuntas.
h) el coeficiente de correlación.

5. En el laboratorio de procesos de manufactura, supóngase que el tiempo de mantenimiento semanal de una máquina depende de dos variables aleatorias conjuntas continuas (en horas). Sea X la variable aleatoria que representa la duración del mantenimiento mecánico, y sea Y la variable aleatoria que representa la duración de mantenimiento eléctrico. La función de densidad de probabilidad conjunta está dada por

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} k(x+2y) & ; \quad 0\le x\le 1, \quad 0\le y\le 1 \\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

Obtener:

a) el valor de k que hace una función de densidad válida.
b) aproximadamente, la gráfica de la función de densidad con el valor de k obtenido.
c) las funciones marginales.
d) las funciones de densidad condicionales, de forma general.
e) el valor esperado que tarda el mantenimiento mecánico.
f) El promedio que dura el mantenimiento eléctrico.
g) El coeficiente de correlación entre las duraciones de mantenimiento mecánico y eléctrico.
h) El promedio total de tiempo de mantenimiento a la semana en el laboratorio de manufactura.

6. Supóngase que X y Y son variables aleatorias independientes con función de densidad

$$g_X(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x^3} & ; \quad x>2 \\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso \end{cases} \qquad h_Y(y)=\begin{cases} by & ; \quad 0<y<1 \\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Obtener los valores de a y b los cuales hacen funciones de densidad válidas.
b) Determinar la función de densidad conjunta para las variables aleatorias.
c) Calcular el valor esperado de $Z = X + Y$

7. Sea la función de probabilidad bidimensional discreta con la siguiente función de masa de probabilidad conjunta

f_{XY} (	0	1	2	3	4
0	0.08	0.07	0.06	0.01	0.01
1	0.06	0.10	0.12	0.05	0.02
2	0.05	0.06	0.09	0.04	0.03
3	0.02	0.03	0.03	0.03	0.04

Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(X \ge 2)$ **b)** $P(X \le 2,\ Y \le 2)$ **c)** $P(X = Y)$