SOLUCIÓN DEL PRIMER EXAMEN FINAL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
TIPO 1 **2016-2**

Problema 1
Los datos siguientes representan la temperatura del fluido de descarga de una planta para el tratamiento de aguas negras durante varios días consecutivos:

43	47	51	48	52
46	51	44	49	46
50	48	50	49	50
50	46	49	45	52
51	49	45	44	50

Para la tabla de datos sin agrupar calcular
a) las medidas de tendencia central (media, mediana y moda)
b) la desviación estándar.

Solución

La expresión para calcular la media para datos no agrupados es $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

por lo se tiene $\overline{X} = \dfrac{1205}{25} = 48.2$

Para la mediana con datos no agrupados al tratarse de un número de datos impar, primero se ordenan los datos, se calcula $\dfrac{n}{2} = \dfrac{25}{2} = 12.5 \approx 13$ el dato ubicado en la posición 13 es el valor correspondiente a $X_{med} = 49$, quedando doce datos por encima de él y doce datos por debajo de él.

Para obtener la moda se observa en la serie de datos el valor o los valores que más se repiten, el valor que más se repite es
$X_{\text{mod}} = 50$

Para el cálculo de la desviación estándar se requiere del cálculo de la varianza mediante

$$\boldsymbol{S}^2 = \frac{1}{\boldsymbol{n}-1}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\left(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{X}}\right)^2 = \frac{1}{24}(170) = 7.083$$

Por lo que la desviación estándar es $\boldsymbol{S} = \sqrt{\boldsymbol{S}^2} = \sqrt{7.083} = 2.6614$

15 puntos

Problema 2
Una fábrica de artículos de plástico utiliza para la producción de recipientes de cocina tres equipos electromecánicos A, B y C. Suponiendo que el equipo A produce el 45% de los recipientes, con un defecto del 1%, el equipo B produce el 35% de los recipientes, con un defecto del 2% y el equipo C produce el 20% de los recipientes, con un defecto del 3%. De la producción almacenada se escoge un recipiente al azar. Determinar la probabilidad de:
a) Que no sea defectuoso.
b) Que sea del equipo B, si observa que esta defectuoso.

Solución
Se proporcionan como información los eventos:

A: equipo A	P(A)=0.45
B: equipo B	P(B)=0.35
C: equipo C	P(C)=0.2
D: defectuoso	D’ = no defectuoso

P(D | A)=0.01
P(D | B)= 0.02
P(D | C)= 0.03

a) Que no sea defectuoso

Se pide $P(D')$

Se requiere calcular

$P(D' \mid \mathrm{A}) = 1 - 0.01 = 0.99$

$P(D' \mid B) = 1 - 0.02 = 0.98$

$P(D' \mid C) = 1 - 0.03 = 0.97$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} P(D') &= P(A)P(D'|A) + P(B)P(D'|B) + P(C)P(D'|C) \\ &= (0.45)(0.99) + (0.35)(0.98) + (0.2)(0.97) \\ &= 0.9825 \end{aligned}$$

b) Que sea del equipo B, si observa que esta defectuoso.

Se pide $P(B \mid D) = \dfrac{P(B \cap D)}{P(D)}$

Se requiere

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) \\ &= (0.45)(0.01)+(0.35)(0.02)+(0.2)(0.03) \\ &= 0.0175 \end{aligned}$$

O también

$$P(D) = 1 - P(D) =$$
$$= 1 - 0.9825 = 0.0175$$
$$P(B \mid D) = \frac{P(B)P(D|B)}{P(D)} = \frac{(0.35)(0.02)}{0.0175} = 0.4$$

15 puntos

Problema 3
En una fábrica de cepillos dentales se detectó que en un lote de diez cepillos tomado al azar, cuatro de ellos tienen defecto en el acabado. Si se toman tres cepillos al azar:

a) Construir la función de distribución de probabilidad para el número de cepillos defectuosos.
b) Calcular la media y la desviación estándar de X.

Solución
Sea la variable aleatoria
X: cepillos defectuoso al elegir tres al azar.

$$P(X=0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{20}{120} = 0.1667 \qquad P(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{(4)(15)}{120} = 0.5$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{(6)(6)}{120} = 0.3 \qquad P(X=3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = 0.0333$$

La función de distribución de probabilidad es

$$P(X=i) = \frac{\binom{4}{i}\binom{6}{3-i}}{\binom{10}{3}} \quad i = 0, 1, 2, 3$$

La tabla de la función masa de probabilidad

X	0	1	2	3	
P(x)	0.1667	0.5	0.3	0.0333	$\sum_x P(x) = 1$

b) Calcular la media y la desviación estándar de X.
Para la media

E[X] =X*P(x) = 0 + 0.5 + 0.6 + 0.0999 = 1.1999
Para la desviación estándar

$$\sigma^2_X = E\left[X^2\right] - \left(E[X]\right)^2$$

E[X^2] = x^2 * P(x) = 0 + 0.5 + 1.2 + 0.2997 = 1.9997

$$\sigma^2_X = 1.9997 - (1.1999)^2 = 0.559939$$

$$\sigma_X = \sqrt{0.559939} = 0.748291$$

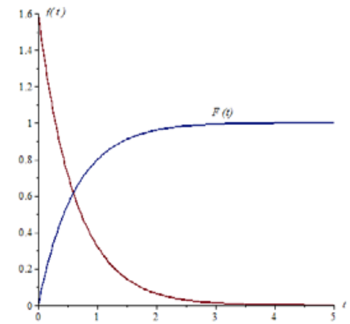
15 puntos

Problena 4
Sea T una variable aleatoria continua que representa el tiempo en minutos que tarda en llegar una persona a un puesto de revistas, después de que otra llegó anteriormente. La función acumulada de distribución de probabilidad es la siguiente

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-1.6t} & si \quad t \geq 0 \\ 0 & si \quad t < 0 \end{cases}$$

a) Calcule la probabilidad para $P(T \geq 1 \mid T \leq 2)$
b) Obtener la función de densidad de probabilidad.

Solución



a) Calcule la probabilidad para $P(T \geq 1 \mid T \leq 2)$

$$P(T \geq 1 \mid T \leq 2) = \frac{P(T \geq 1 \cap T \leq 2)}{P(T \leq 2)} = \frac{P(1 \leq T \leq 2)}{P(T \leq 2)}$$

$$P(1 \leq T \leq 2) = F(2) - F(1) =$$
$$= \left(1 - e^{(-1.6)(2)}\right) - \left(1 - e^{(-1.6)(1)}\right) =$$
$$= e^{-1.6} - e^{-3.2} = 0.16113$$

$$P(T \le 2) = 1 - e^{(-1.6)(2)} =$$
$$= 1 - 0.0476 =$$
$$= 0.9592$$

$$P(T \ge 1 \mid T \le 2) = \frac{0.16113}{0.9592} = 0.1680$$

b) Obtener la función de densidad de probabilidad.

Para determinar la función de densidad de probabilidad dada la función de distribución acumulada, es necesario derivar la función.

$$f(t) = \frac{d\,F(t)}{d\,t} = \frac{d\left(1 - e^{-1.6t}\right)}{d\,t} = 1.6\,e^{-1.6t}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1.6\,e^{-1.6t} & si \quad t \ge 0 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

15 puntos

Problema 5

Sean las variables aleatorias conjuntas X y Y, con una distribución de probabilidad dada por la siguiente tabla

X \ Y	-1	1
1	1/6	1/3
2	1/12	¼
3	1/12	1/12

a) Determinar si X y Y son estadísticamente independientes.

b) $P(X \ge 2 \mid Y \le 0)$

Solución

a) Determinar si X y Y son estadísticamente independientes.

Es necesario determinar las probabilidades marginales

La función marginal de X es:

X	1	2	3
$f_X(x)$	6/12	4/12	2/12

La función marginal de Y es:

Y	-1	1
$f_Y(y)$	4/12	8/12

Comprobando para:

$$f(X=2, Y=-1) = 1/12 \ne f_X(X=2)\, f_Y(Y=-1) = (4/12)(4/12) = 16/144$$

Por lo tanto las variables no son estadísticamente independientes.

b) $P(X \ge 2 \mid Y \le 0)$

$$P(X \ge 2 \mid Y \le 0) = \frac{P(X \ge 2 \cap Y \le 0)}{P(Y \le 0)}$$

$$P(Y \le 0) = P(Y = -1) = \frac{4}{12}$$

$$P(X \ge 2 \cap Y \le 0) = P(X = 2, Y = -1) + P(X = 3, Y = -1) =$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12}$$

$$P(X \ge 2 \mid Y \le 0) = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{4}{12}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

15 puntos

Problema 6

Miles de estudiantes presentaron un examen de admisión para ingresar a una universidad. Sea X es la variable aleatoria que representa la calificación de un estudiante elegido al azar. Se desconoce la distribución de X pero se estima que tiene una media de 68.3 y una desviación estándar de 8.4. Si se toma una muestra de 36 exámenes para ser calificados, ¿cuál es la probabilidad de que el promedio de las calificaciones sea superior a 70?

Solución

Se desconoce la distribución para la variable aleatoria X, pero se tiene una muestra de 36 exámenes, por lo que se puede aplicar el Teorema Central del Límite.

Se tiene como información: $\mu = 68.3$ y $\sigma = 8.4$

Se pide $P(\overline{X} > 70)$

$$P(\overline{X} > 70) = 1 - P\left(Z > \frac{70 - 68.3}{\frac{8.4}{\sqrt{36}}} \right)$$

$$P\left(\overline{X} > 70\right) = 1 - P\left(Z > 1.2142\right)$$
$$= 1 - 0.8869$$
$$= 0.1131$$

Con Excel $P\left(\overline{X} > 70\right) = 0.1124$

15 puntos

Problema 7

Los siguientes datos pertenecen a un estudio acerca de los efectos que la contaminación ambiental tiene sobre la vida terrestre; en particular, el efecto de pesticidas en el espesor de los cascarones de ciertas aves.

Residuos de pesticidas en los lípidos de la yema (partes por millón)	Espesor del cascaron del huevo
117	0.49
65	0.52
393	0.37
98	0.53
112	0.49

Si los residuos de pesticidas en los lípidos de la yema son 105 partes por millón, ¿Cuánto vale el espesor del cascarón?

Solución

Para obtener el espesor del cascarón es necesario plantear la ecuación que permita dicho cálculo.

La expresión para la recta de regresión es

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

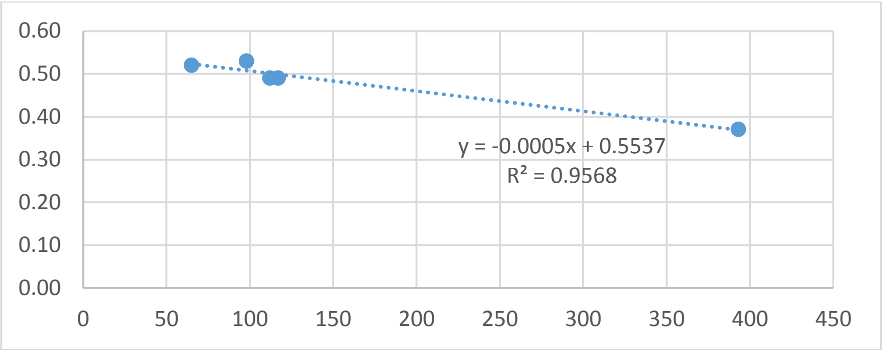
$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\right)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{343.36 - \frac{1}{5}(2.4)(785)}{194511 - \frac{1}{5}(785)^2} =$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{-33.44}{71266} = -0.000469$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x} =$$
$$= 0.48 - (-0.00046923)(157) =$$
$$= 0.553669$$

$$\hat{y} = 0.553669 - 0.00046923\, x$$



Para el valor de los residuos proporcionado el valor correspondiente al espesor del cascarón es

$$\hat{y} = 0.553669 - (0.00046923)(105)$$

$$\hat{y} = 0.50439985$$

10 puntos