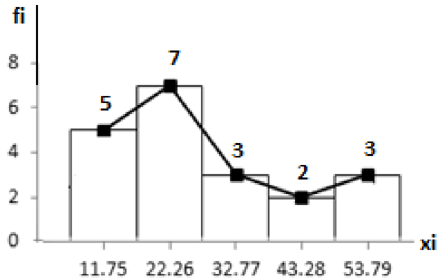
SOLUCIÓN PRIMER EXAMEN FINAL "A"

SEMESTRE 2016 -1 **TIPO A**
DURACIÓN MÁXIMA 2.0 HORAS **4 DE DICIEMBRE DE 2015**

1. El ingeniero de una empresa logística ha solicitado un estudio de estadística descriptiva para todos los camiones de carga que han incumplido con los requerimientos establecidos por los proveedores. Los datos recabados brindan el siguiente gráfico:



Calcule el coeficiente de variación de los datos recabados.

SOLUCIÓN:

Coeficiente de variación: $\mathrm{cv}_{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{s}}{\bar{\mathrm{x}}}$

$\bar{\mathrm{x}} = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{x_i}\, \mathrm{f_i} = \frac{1}{20}[11.75(5) + 22.26(7) + 32.77(3) + 43.28(2) + 53.79(3)] = \frac{1}{20}[560.81] = 28.0405$

Varianza: $\mathrm{s}^2 = \frac{1}{\mathrm{n}-1} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} (\mathrm{x_i} - \bar{\mathrm{x}})^2 \mathrm{f_i}$

Donde:
m= # clases, n=# de datos, x_i= marca de clase, f_i=frecuencia de clase, $\bar{x}$= promedio de datos agrupados

$\mathrm{s}^2 = \frac{1}{19}[(11.75 - 28.0405)^2(5) + (22.26 - 28.0405)^2(7) + (32.77 - 28.0405)^2(3) + (43.28 - 28.0405)^2(2) + (53.79 - 28.0405)^2(3)] = \frac{1}{19}(4081.5007) \approx 214.8158$

Desviación estándar s = $\sqrt{s^2} = \sqrt{214.8158} \approx 14.6566$

$\therefore\ \mathbf{cv}_{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{s}}{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{14.6566}{\mathbf{28.0405}} \approx \mathbf{0.5227}$

2. Una compañía que realiza proyectos de ingeniería en cierta zona del país, clasifica las formaciones geológicas de la zona en tres tipos: I, II y III, con una probabilidad de 0.35, 0.40 y 0.25 para los tres tipos de formaciones respectivamente. Se sabe que hay depósitos de agua (almacenamiento freático en el subsuelo) con una probabilidad del 40% en las formaciones del tipo I, del 20% en las formaciones del tipo II y del 30% en las formaciones del tipo III.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía encuentre agua en esa zona?
b) Si la compañía no encuentra agua en esa zona, determinar la probabilidad de que exista una formación del tipo II.

SOLUCIÓN:

DATOS: Sea B_i= la formación geológica tipo i

$\therefore$ P(B_I)= 0.35, P(B_{II})= 0.40, P(B_{III})= 0.25

Sea A el evento: existen depósitos de agua. Por lo tanto: P($A|B_I$)= 0.40, P($A|B_{II}$)= 0.20, P($A|B_{III}$)= 0.30

a) La probabilidad de que la compañía encuentre agua en esa zona es P(A).

P(A)= P($A|B_I$) P(B_I)+ P($A|B_{II}$) P(B_{II})+ P($A|B_{III}$) P(B_{III})

= (0.40)(0.35)+(0.20)(0.40)+(0.30)(0.25) = 0.295

$\therefore$ ***La probabilidad de encontrar agua en esa zona es de 0.295***

b) Si la compañía no encuentra agua en esa zona, la probabilidad de que exista una formación de tipo II es: P($B_{II}|\bar{A}$)

P($B_{II}|\bar{A}$) = $\frac{\mathrm{P}(B_{II}\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}$

P($\bar{A}$)= 1- P(A)= 1- 0.295= 0.705

$\mathrm{P}(B_{II} \cap \bar{A})$= P($\bar{A}|B_{II}$) P($B_{II}$)= (0.80)(0.40)= 0.32

$\therefore$ ***P($\boldsymbol{B_{II}|\bar{A}}$) = $\frac{\mathbf{0.32}}{\mathbf{0.705}}$= 0.4539***

3. Una proveedora de productos químicos tiene en existencia 100 kg. de un producto, éste se vende a los clientes en lotes de 5 kg. Sea X el número de lotes ordenados por un cliente seleccionado al azar, suponga que X tiene la siguiente función de probabilidad:

x	1	2	3	4
f(x)	0.2	0.4	0.3	0.1

Obtenga el valor de la desviación estándar del número de lotes ordenados por el siguiente cliente.

SOLUCIÓN: Desviación estándar: σ_x= $\sqrt{\sigma_x^2}$

$$\sigma_x^2 = \mathrm{E}(X-\mu_x)^2 = \mathrm{E}(X^2)\text{-}[\mathrm{E(X)}]^2$$

Por ser X una variable aleatoria discreta:

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{\forall x} x^2 f(x) = (1)^2(0.2) + (2)^2(0.4) + (3)^2(0.3) + (4)^2(0.1)$$
$$= 0.2+1.6+2.7+1.6 = 6.1$$

$$\mathrm{E(X)} = \sum_{\forall x} x f(x) = (1)(0.2) + (2)(0.4) + (3)(0.3) + (4)(0.1)$$
$$= 0.2+0.8+0.9+0.4 = 2.3$$

$$\therefore \sigma_x^2 = \mathrm{E}(X^2)\text{-}[\mathrm{E(X)}]^2 = 6.1 - (2.3)^2 = 0.81$$

Entonces, la desviación estándar del número de lotes ordenados por el siguiente cliente es:

$$\boldsymbol{\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{0.81} = 0.9}$$

4. Suponga que las variables X,Y tienen la siguiente función conjunta de probabilidad.

f(x,y)		**y**		
		-1	0	1
x	-1	1/5	0	1/5
	0	0	1/5	0
	1	1/5	0	1/5

Determine si las variables X y Y son estadísticamente independientes y justifique su respuesta.

SOLUCIÓN: Las variables aleatorias conjuntas discretas X y Y, son estadísticamente independientes si: f(x,y)= f(x)f(y), ∀(x,y)

La función marginal de X es:

x	-1	0	1
f(x)	$^2/_5$	$^1/_5$	$^2/_5$

La función marginal de Y es:

y	-1	0	1
f(y)	$^2/_5$	$^1/_5$	$^2/_5$

Para x= - 1, y= - 1: P(X=-1,Y=-1)= f(-1,-1)= $^1/_5$= 0.2

Mientras que: $f_x(-1)$= $^2/_5$ y $f_y(-1)$= $^2/_5$, por lo que al calcular f(x)f(y) se tiene:

$f_x(-1)f_y(-1)= (\frac{2}{5})(\frac{2}{5}) = (\frac{4}{25}) = 0.16$

Se puede observar que: f(x,y)≠f(x)f(y) ; ∀(x,y)

Por lo que puede decirse que las variables X y Y no son estadísticamente independientes.

5. Suponga que barcos de carga comerciales llegan al puerto Veracruz según el proceso de Poisson, con un promedio de 8 barcos de carga por hora, de modo que el número de llegadas durante un periodo t de horas es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 8t$. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 5 barcos de carga lleguen durante un periodo de una hora?

SOLUCIÓN: Sea X la variable aleatoria discreta que representa el número de barcos que llegan al Puerto de Veracruz durante un periodo de t horas. Por lo tanto, X es una variable aleatoria de Poisson con λ=8t.
La probabilidad de que exactamente 5 barcos lleguen durante un periodo de una hora es:

$$\mathbf{P(X=5)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}=\frac{(8^5)(e^{-8})}{5!}= 0.0916}$$

6. La distribución de probabilidad del precio de las acciones de cierta empresa tiene un valor esperado de \$200,000 y una desviación estándar de \$100,000. Si se compran 30 de estas acciones, determine la probabilidad de que el precio promedio de las acciones compradas sea menor a \$175,000.

SOLUCIÓN: Sea X la variable aleatoria continua que representa el precio de las acciones de la empresa con μ_x=\$200,000 y σ_x=\$100,000
Sea $\bar{X}$ la variable aleatoria que representa el precio promedio de una muestra de 30 acciones.

Por el teorema del límite central: $\bar{X}$~N $(\mu_{\bar{x}} = \mu_x,\ \sigma^2{}_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2{}_x}{n})$

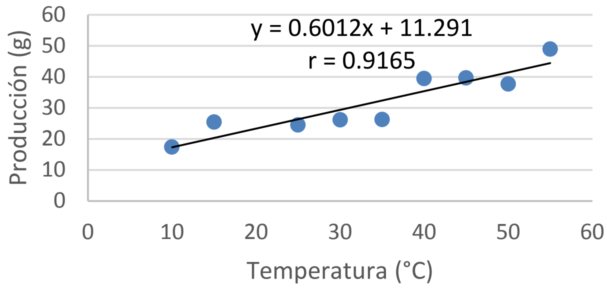
Por lo tanto: $\bar{X}$~N$(\mu_{\bar{x}} = \$200{,}000, \sigma^2{}_{\bar{x}} = \frac{(100{,}000)^2}{30})$

La probabilidad de que el precio promedio de las acciones compradas sea menor a \$175,000 es: P($\bar{X} < \$175,000$)

P($\bar{X} < \$175,000$) = P (z<$\frac{175000-200000}{\frac{100000}{\sqrt{30}}}$)= P (z<-1.369)≈Fz(-1.37)= 0.0853

7. Los siguientes datos corresponden a un experimento químico, para el cual se quiere determinar si existe alguna relación entre la temperatura ambiente (°C) y la producción de la reacción (gr).

X [°C]	Y [gr]
10	17.3
15	25.4
25	24.5
30	26.1
35	26.2
40	39.4
45	39.6
50	37.6
55	48.9
$\bar{X}$ = 33.89	**$\bar{Y}$ = 31.67**



Con los datos proporcionados, conteste la siguiente pregunta.
¿Qué porcentaje del comportamiento de los datos es explicado por el modelo de regresión propuesto?

a. El modelo no explica los datos
b. 83.99%
c. 91.65%
d. 100%
e. No se puede determinar con los datos proporcionados

<u>SOLUCIÓN:</u>

El valor que indica la proporción en que el modelo de regresión propuesto, explica la relación que existe entre las variables es el coeficiente de determinación r^2 .

En éste caso $r^2 = (0.9165)^2 = 0.8399 = 83.99\%$, por lo que la opción "b", es la respuesta.