UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
SEGUNDO EXAMEN FINAL

SEMESTRE 2015-1 **TIPO 1**
DURACIÓN MÁXIMA 2.0 HORAS **03 DE DICIEMBRE DE 2014**

NOMBRE____
Apellido paterno **Apellido materno** **Nombre (s)** **Firma**

1. La tabla registra las estaturas en pulgadas de una muestra de 140 alumnos de nuevo ingreso, de género masculino, en una universidad del centro del país.

Intervalo de Clase Estatura(pulgadas)	Frecuencia (f)
59.5-62.4	3
62.5-65.4	12
65.5-68.4	24
68.5-71.4	46
71.5-74.4	55

a) Determine la estatura media y la estatura mediana de los estudiantes.

b) Grafique la ojiva de frecuencia relativa acumulada.

c) Calcule la desviación estándar.

(15 Puntos)

Resolución.
Ajustando los intervalos de la tabla de frecuencias se tiene:

Intervalo de Clase Estatura(pulgadas)	Intervalo Ajustado	Frecuencia (f)	Marca de clase (m)	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
59.5-62.4	59.45-62.45	3	60.95	0.0214	0.0214
62.5-65.4	62.45-65.45	12	63.95	0.0857	0.1071
65.5-68.4	65.45-68.45	24	66.95	0.1714	0.2786
68.5-71.4	68.45-71.45	46	69.95	0.3286	0.6071
71.5-74.4	71.45-74.45	55	72.95	0.3929	1
	Total	140			

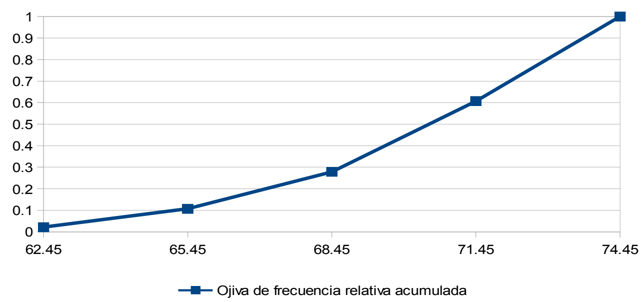
a) La media para datos agrupados es:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k} f_k m_k=\frac{1}{140}[3(60.95)+12(63.95)+24(66.95)+46(69.95)+55(72.95)]=69.91\ pulgadas$$

La mediana:

$$\tilde{x}=L_m+\left(\frac{\frac{n}{2}-T}{f_m}\right)\Delta=68.45+\left(\frac{\frac{140}{2}-39}{46}\right)(3)=70.47\ pulgadas$$

b) Ojiva de frecuencia relativa acumulada:



c) $S^2 = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} f_j m_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{k} f_j m_j\right)^2}{n-1}$

$$S^2 = \frac{[3(60.95)^2 + 12(63.95)^2 + 24(66.95)^2 + 46(69.95)^2 + 55(72.95)^2] - \frac{1}{140}[3(60.95) + 12(63.95) + 24(66.95) + 46(69.95) + 55(72.95)]^2}{139}$$

$S^2 = 9.9696 \qquad S = \sqrt{9.9693} = 3.1574$

2. En una tienda especializada en partes de robots, se ha observado que en el 7% de los sensores de luz salen defectuosos. Si un profesor de robótica entra a la tienda para comprar tres de estos sensores para sus alumnos.
a) Calcule la probabilidad de que uno de los sensores elegidos sea defectuoso.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más dos sensores sean defectuosos?

(10 Puntos)

Resolución.
Sean los eventos: A={x|x es un sensor defectuoso} y B={x|x es un sensor no defectuoso}

a) La probabilidad de que uno de los sensores elegidos sea defectuoso es:

P(B∩B∩A U B∩A∩B U A∩B∩B)=3P(B∩B∩A)=3P(B)P(B)P(A)

donde P(A)=0.07 y P(B)=0.93, entonces la probabilidad pedida es 3(0.93)(0.93)(0.07)=0.1816

b) La probabilidad de que a lo más dos sensores sean defectuosos es:

P(B∩B∩B U B∩B∩A U B∩A∩B U B∩A∩A U A∩B∩B U A∩B∩A U A∩A∩B) =1-P(A∩A∩A)=1-P(A)P(A)P(A)
=1-(0.07)(0.07)(0.07)
=0.9996

3. Sea Y una variable aleatoria con función de densidad dada por: $f_Y(y) = \begin{cases} 0.2 & -1 \le y \le 0 \\ 0.2 + ky & 0 < y \le 1 \\ 0 & en \ \ otro \ \ caso \end{cases}$

a) Determinar el valor de *k.*
b) Calcular P (Y > 0.5|Y > 0.1)

(15 Puntos)

Resolución.

a) $$\int_{-1}^{0} 0.2\,dy + \int_{0}^{1} (0.2 + ky)\,dy = 1$$
$$0.2 + 0.2 + \frac{k}{2} = 1$$
$$k = 1.2$$

b) $$P(Y > 0.5|Y > 0.1) = \frac{P(Y > 0.5)}{P(Y > 0.1)} = \frac{\int_{0.5}^{1} (0.2 + 1.2\text{y})\,dy}{\int_{0.1}^{1} (0.2 + 1.2\text{y})\,dy} = \frac{0.55}{0.774} = 0.71$$

4. Se ha comprobado que el tiempo de vida de cierto tipo de marcapasos sigue una distribución exponencial con media de 16 años.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona a la que se le ha implantado este marcapasos se le deba reimplantar otro antes de 20 años?
b) Si el marcapasos lleva funcionando correctamente 5 años en un paciente, ¿cuál es la probabilidad de que haya que cambiarlo antes de 25 años?

(15 Puntos)

Resolución.

Sea T la variable aleatoria que mide la duración del marcapasos en una persona.

$$T \rightarrow \text{ Exp}\left(\lambda = \frac{1}{16}\right) \Leftrightarrow f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0$$

a) $P(T<20) = \int_0^{20} f(t)\,dt = \int_0^{20} \frac{1}{16} e^{-\frac{1}{16}t}\,dt = 0.7135$

b) $P(5<T<25) = \int_5^{25} f(t)\,dt = \int_5^{25} \frac{1}{16} e^{-\frac{1}{16}t}\,dt = 0.522$

5, Sea el precio que el transportista inicial paga por un barril de petróleo crudo, y , el que paga la refinería que compra ese petróleo. La densidad conjunta de está dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{200} \qquad 20<x<y<40$$

a) Calcular $E(X), E(Y)\ \ y\ \ E(XY)$. b) Calcular $Cov(X,Y)$ (15 Puntos)

Resolución.

a)

Las funciones marginales para X y para Y son:
$$f_x(x) = \int_x^{40} \frac{1}{200}\,dy = \frac{1}{200}(40-x)$$
$$f_y(y) = \int_{20}^{y} \frac{1}{200}\,dx = \frac{1}{200}(y-20)$$

Los valores esperados son:
$$E(X) = \frac{1}{200}\int_{20}^{40} x(40-x)\,dx = \frac{80}{3} = 26.6667$$
$$E(Y) = \frac{1}{200}\int_{20}^{40} y(y-20)\,dy = \frac{100}{3} = 33.3334$$
$$E(XY) = \int_{20}^{40}\int_{x}^{40} \frac{xy}{200}\,dy\,dx = 900$$

b) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 900 - (\frac{80}{3})(\frac{100}{3}) = 11.1111$

6. El tiempo que tarda un solicitante seleccionado al azar, en llenar cierta forma para una hipoteca, tiene una distribución normal con valor promedio de 10 minutos y desviación estándar de dos minutos. Si en un día determinado cinco individuos llenan una forma, y al siguiente día son seis los que llenan la forma, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad de tiempo promedio de la muestra de cada día sea a los sumo 11 minutos?

(15 Puntos)

Resolución.

Sea X el tiempo que tarda una persona en llenar una solicitud.

$X \sim N(\mu_X = 10, \sigma_X^2 = 2^2)$

Para el día 1, n=5

$$P\left(\bar{X}\le 11\right)=P\left(Z\le\frac{11-10}{\frac{2}{\sqrt{5}}}\right)=P\left(Z\le 1.12\right)=0.8686$$

Para el día 2, n=6

$$P\left(\bar{X}\le 11\right)=P\left(Z\le\frac{11-10}{\frac{2}{\sqrt{6}}}\right)=P\left(Z\le 1.22\right)=0.8888$$

Para ambos días, $P\left(\bar{X}\le 11\right)=\left(0.8686\right)\left(0.8888\right)=0.7720$

7. El presidente de una agencia de autos supone que el tiempo que un vendedor pasa con un cliente (minutos) debe tener una relación positiva con el monto de lo que éste último compra. Para corroborar si esta relación existe, reunieron los datos de nueve vendedores, y las sumas de estos datos son:

Minutos	Montos	$(\text{Minutos})^2$	$(\text{Montos})^2$	(Minutos)(Montos)
874	3565	91330	2147175	358852

a) A partir de los datos anteriores, estime la recta de regresión que permite estimar el monto de las compras en función de los minutos invertidos por el vendedor.
b)¿Existe una relación lineal entre el monto de compras y el tiempo invertido por el vendedor? Justifique su respuesta.

(15 Puntos)

Resolución.
a) En función de la pregunta se determina que el tiempo invertido por el vendedor es "x" y el monto de compras es "y".
Utilizando las siguientes expresiones y sustituyendo se tiene:

$$a=\frac{(\sum y)(\sum x^2)-(\sum x)(\sum xy)}{n\sum x^2-(\sum x)^2}=\frac{(3565)(91330)-(874)(358852)}{9(91330)-(874)^2}=205.78$$

$$b=\frac{n\sum xy-(\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2-(\sum x)^2}=\frac{9(358852)-(874)(3565)}{9(91330)-(874)^2}=1.96$$

por lo que el modelo de regresión lineal queda: $y=a+bx=205.78+1.96\text{x}$

b) Para determinar la relación entre las variables, se calcula el coeficiente de correlación r.

$$S_{xx}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}=91330-\frac{(874)^2}{9}=6454.88$$

Donde

$$S_{yy}=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{(\sum_{i=1}^{n}y_i)^2}{n}=2147175-\frac{(3565)^2}{9}=735038.889$$

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}=358852-\frac{(874)(3565)}{9}=12650.889$$

Entonces: $r=\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}=\frac{12650.889}{\sqrt{(6454.889)(735038.889)}}=0.1836$