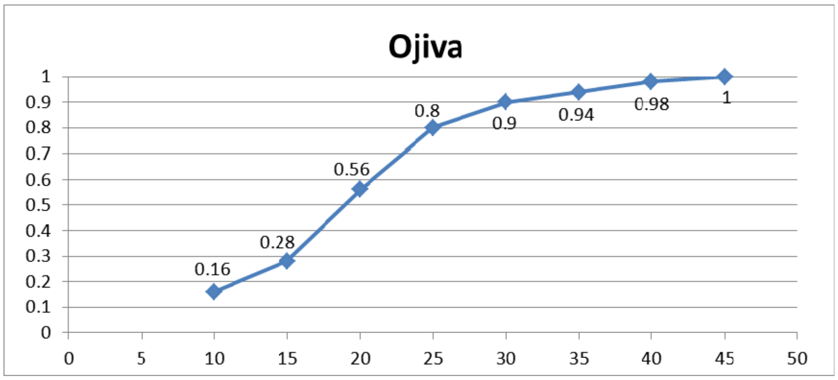
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
SEGUNDO EXAMEN FINAL
RESOLUCIONES

SEMESTRE 2012 - 2 — **TIPO 1**
DURACIÓN MÁXIMA 2.5 HORAS — **6 DE JUNIO DE 2012**

NOMBRE____
Apellido paterno **Apellido materno** **Nombre (s)** **Firma**

Problema 1
De la ojiva mostrada a continuación, obtener su tabla de frecuencias, la media y varianza.



15 Puntos
Resolución

Tabla de frecuencias

Frontera inferior	Frontera superior	Marca de clase	Frecuencia relativa acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
5	10	7.5	0.16	0.16	0.16n	0.16n
10	15	12.5	0.28	0.12	0.12n	0.28n
15	20	17.5	0.56	0.28	0.28n	0.56n
20	25	22.5	0.80	0.24	0.24n	0.80n
25	30	27.5	0.90	0.10	0.10n	0.90n
30	35	32.5	0.94	0.04	0.04n	0.94n
35	40	37.5	0.98	0.04	0.04n	0.98n
40	45	42.5	1.00	0.02	0.02n	1.00n

Media
La media aritmética no se puede obtener porque no se dispone de la colección de datos, se estimará a través del concepto de media ponderada:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} t_i f_i^* = t_1 f_1^* + t_2 f_2^* + \cdots + t_m f_m^*$$

En donde t_i es la marca de clase del intervalo i, f_i^* es la frecuencia relativa del intervalo i y m es el número de intervalos o clases en la tabla de frecuencias.

Marca de clase	Frecuencia relativa	tifi*
7.5	0.16	1.2
12.5	0.12	1.5
17.5	0.28	4.9
22.5	0.24	5.4
27.5	0.10	2.75
32.5	0.04	1.3
37.5	0.04	1.5
42.5	0.02	0.85
	Suma=	19.4

Por lo tanto la media es aproximadamente $\bar{x} = 19.4$

Para calcular la varianza, se usa

Marca de clase	Frecuencia relativa	$t_i f_i$*	$t_i^2 f_i$*
7.5	0.16	1.2	9
12.5	0.12	1.5	18.75
17.5	0.28	4.9	85.75
22.5	0.24	5.4	121.5
27.5	0.1	2.75	75.63
32.5	0.04	1.3	42.25
37.5	0.04	1.5	56.25
42.5	0.02	0.85	36.13
	Suma=	19.4	445.25

entonces

$$s^2 = t_i^2 f_i^* - \left(t_i f_i^*\right)^2 = 445.25 - (19.4)^2 = 68.89$$

Desviación estándar, que es la raíz de la varianza

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{68.89} = 8.3$$

Problema 2

Se tienen tres urnas como se describe:

Urna I contiene cuatro bolas rojas y cinco bolas blancas.
Urna II contiene dos bolas rojas y una bola blanca.
Urna III contiene dos bolas rojas y tres bolas blancas.

Se selecciona una urna al azar y se saca una bola de la urna, dado que la bola es roja, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna I?

15 Puntos

Resolución

Del enunciado se tiene

Sea el evento I que representa seleccionar la urna I.

Sea el evento II que representa seleccionar la urna II.

Sea el evento I que representa seleccionar la urna III.

con probabilidades P(I) =1/3 , P(II)=1/3 y P(III)=1/3 porque es igualmente probable la selección de la urna.

Sea el evento *R* que representa seleccionar una bola roja.
Sea el evento *B* que representa seleccionar una bola blanca.

entonces del enunciado se tiene

$$P(R \mid I) = \frac{4}{9} \qquad P(R \mid II) = \frac{2}{3} \qquad P(R \mid III) = \frac{2}{5}$$

La probabilidad condicional

$$P(I|R) = \frac{P(I \cap R)}{P(R)}$$

de la multiplicación

$$P(I \cap R) = P(I)P(R|I)$$

y se tiene la probabilidad total, dada por

$$P(R) = P(I)P(R|I) + P(II)|P(R|II) + P(III)P(R|III)$$

del enunciado, se sabe que la pregunta corresponde a la aplicación del Teorema de Bayes, dado que se tenga una bola roja que se haya seleccionado de la urna I, entonces

$$P(I|R) = \frac{P(I)P(R|I)}{P(I)P(R|I) + P(II)P(R|Ii) + P(III)P(R|III)}$$

sustituyendo valores

$$P(I|R) = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)}{\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{4}{27} + \frac{2}{9} + \frac{2}{15}} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{68}{135}} = \frac{5}{17}$$

Problema 3
Realidad
El duque de Toscana preguntó a Galileo por qué al tirar tres dados y realizar la suma era más fácil obtener un diez que un nueve, Galileo respondió esta pregunta en su texto ***Sopra le scoperte dei dadi*** (Sobre los resultados de los dados).
Para Galileo fue evidente que por ejemplo para sumar tres, debía obtener uno en cada dado (1,1,1) y para sumar cuatro debía obtener un dos y dos uno, que podían salir de tres formas distintas: (2,1,1), (1,2,1) ó (1,1,2) y así sucesivamente cubrir todas las posibilidades. ¿Cuál es la probabilidad que encontró Galileo para la pregunta del duque de Toscana (sumar 10 ó 9)?
Ficción
El hijo del duque al sentirse celoso del estudioso, le pregunto cuál sería la probabilidad de sacar uno, dos o tres “6” en una tirada, lo que Galileo mostró como (complete la tabla)

x	**1**	**2**	**3**
f(x)	**75/216**	**15/216**	

Donde X representa los seis que salen en una tirada de los tres dados. Cuya suma no dio 100%. Explique por qué.
10 Puntos
Resolución
Para sumar 10 existen 27 formas, que se muestran como: (1−3−6), (1−4−5), (1−5−4), (1−6−3), (2−2−6), (2−3−5), (2−4−4), (2−5−3), (2−6−2), (3−1−6), (3−2−5), (3−3−4), (3−4−3), (3−5−2), (3−6−1), (4−1−5), (4−2−4), (4−3−3), (4−4−2), (4−5−1), (5−1−4), (5−2−3), (5−3−2), (5−4−1), (6−1−3), (6−2−2), (6−3−1).
Para sumar 9 necesita (3,3,3), (1,2,6), (1,3,5),(1,4,4),(2,2,5),(2,3,4)
De los cuales forman 1 (3,3,3), 6(1,2,6), 6(1,3,5), 3(1,4,4), 3(2,2,5), 6(2,3,4), dado que al haber dos tres iguales hay una sola opción, al haber dos iguales hay 3 y al ser todos diferentes hay 6, cuya probabilidad es 25/216,
P(suma=9)=25/216 < P(suma=10)=27/216

La función de probabilidad correcta, la cual incluye que X puede tomar el valor de cero en su recorrido, ya que en el propuesto se omitió, es

x	0	1	2	3
$f_X(x)$	125/216	75/216	15/216	1/216

Esto es
P(Obtener cero seis en el lanzamiento de tres dados)= 125/216 Por ejemplo: (1,1,1), (1,2,3), (3,4,5),…
5X5X5=125 casos a favor todos sin seis
cinco y cinco y cinco formas para tener tres resultados sin seis.

P(Obtener un seis en el lanzamiento de tres dado)= 75/216 Por ejemplo: (1,1,6), (6,2,3), (4,6,5),…
3X5X5=75 casos a favor todos con un seis
tres formas para poner un seis en sus posiciones y cinco y cinco que no sean seis.

P(Obtener dos seis en el lanzamiento de tres dado)= 15/216 Por ejemplo: (1,6,6), (6,6,2), (3,6,6),…
3X5=15 casos a favor todos con dos seis
Tres formas para poner dos seis en tres posiciones y cinco para otro que no sea seis.

P(Obtener tres seis en el lanzamiento de tres dado)= 1/216 Por ejemplo: (6,6,6)
Un caso a favor todos seis
uno y uno y uno formas de tener seis y seis y seis.

La suma no da uno porque no se consideran los casos en que no sale ningún seis, esto es, que el número de seis sea cero en los tres dados (x=0).

Problema 4
En la Cuenca Salina del Istmo, la probabilidad de que un pozo exploratorio resulte productor de aceite es de 0.15. Si en la cuenca se perforan 100 pozos exploratorios.
a) Calcular la probabilidad de que haya más de 15 pozos productores.
b) Determinar el número esperado de pozos productores.
c) Obtener el coeficiente de variación asociado.
15 Puntos
Resolución
Se trata de una secuencia de Bernoulli en la que resulta muy conveniente hacer una aproximación a distribución normal (modelo de Gauss), en vez de utilizar una distribución binomial.

$$X \sim Binomial\,(100, 0.15) \quad , \quad \mu = 100(0.15) = 15 \quad , \quad \sigma^2 = 100(0.15)(0.85) = 12.75$$

$$X \sim Normal(15, 12.75) \quad , \quad Z \sim N(0,1) \quad , \quad Z = \frac{X - 15 + 0.5}{\sqrt{12.75}}$$

a) Del enunciado, es una distribución binomial, entonces se tiene que calcular

$$P(X > 15) \approx P(X \geq 15) = \sum_{x=16}^{100} \binom{100}{x} (0.15)^x (0.85)^{100-x} = 0.4316$$

Ahora se puede hacer la aproximación

$$P(X > 15) \approx P\left(\frac{X-\mu+FCPC}{\sqrt{npq}} > \frac{15-15+0.5}{\sqrt{12.75}}\right) = P\left(Z > \frac{0.5}{\sqrt{12.75}}\right) =$$

$$= P(Z > 0.14) = 1 - P(Z \leq 0.14) = 1 - 0.5557 = 0.44433$$

b) $E(X) = \mu = np = 15$

c) $CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{3.57}{15} = 0.238$

Problema 5

La función de densidad conjunta de dos variables aleatorias *X* y *Y* está dada por:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} cxy & ; \quad 0 < x < 4 \quad , \quad 1 < y < 5 \\ 0 & ; \quad \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Determinar el valor

b) Obtener la covariancia entre las variables aleatorias conjuntas.

15 Puntos

Resolución

a) Por las propiedades que debe cumplir una función de densidad, se sabe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx dy = 1$$

Empleando la definición, en la respectiva región de definición que es rectangular

$$\int_{x=0}^{x=4} \int_{y=1}^{y=5} c\, xy\; dy dx = c \int_{x=0}^{x=4} \left[\int_{y=1}^{y=5} xy dy\right] dx =$$

$$= c \int_{x=0}^{x=4} \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=1}^{y=5} dx = c \int_{x=0}^{x=4} \left(\frac{25}{2}x - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$= c \int_{x=0}^{x=4} 12x\, dx = c \;\; [6x^2]_0^4 = c\, [6\,(4^2)] = 96\, c$$

$$96c = 1 \qquad \therefore \qquad c = \frac{1}{96}$$

entonces la función queda como

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{96} xy & ; \quad 0 < x < 4 \quad , \quad 1 < y < 5 \\ 0 & ; \quad \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

b) La covariancia se define como $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)\, E(Y)$

se sabe que los valores esperados están dados por

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\; dy dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\ f_{XY}(x,y)\ dydx$$
$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\ f_{XY}(x,y)\ dydx$$

entonces sustituyendo en la función de densidad con respecto de la región de definición

$$E(XY) = \int_{x=0}^{x=4}\int_{y=1}^{y=5} xy\left(\frac{xy}{96}\right)\ dydx = \frac{1}{96}\int_{x=0}^{x=4}\int_{y=1}^{y=5} x^2y^2\ \ dydx = \frac{1}{96}\int_{x=0}^{x=4}\left(\frac{124}{3}\ x^2\right)dx = \frac{1}{96}\left(\frac{7936}{9}\right)$$
$$= \frac{248}{27}$$

$$E(X) = \int_{x=0}^{x=4}\int_{y=1}^{y=5} x\left(\frac{xy}{96}\right)\ dydx = \frac{1}{96}\int_{x=0}^{x=4}\int_{y=1}^{y=5} x^2\ y\ \ dydx == \frac{1}{96}\int_{x=0}^{x=4}(12\,x^2)\ dx = \frac{1}{96}\ (256) = \frac{256}{96}$$
$$= \frac{8}{3}$$

$$E(Y) = \int_{x=0}^{x=4}\int_{y=1}^{y=5} y\left(\frac{xy}{96}\right)\ dydx = \frac{1}{96}\int_{x=0}^{x=4}\int_{y=1}^{y=5} x\ y^2\ \ dydx == \frac{1}{96}\int_{x=0}^{x=4}\left(\frac{124}{3}\ x\right)\ dx = \frac{1}{96}\left(\frac{992}{3}\right) = \frac{31}{9}$$

sustituyendo en la covariancia, se tiene

$$Cov\ (X\,,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y) = \frac{248}{27} - \left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{31}{9}\right) = 0$$

De las funciones marginales

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy \qquad\qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx$$

sustituyendo

$$f_X(x) = \int_1^5 \frac{1}{96}(xy)\,dy = \frac{1}{8}x \quad ; \quad 0 \le x \le 4 \qquad\qquad f_Y(y) = \int_0^4 \frac{1}{96}(xy)\,dx = \frac{1}{12}y \quad ; \quad 1 \le y \le 5$$

Al multiplicar la funciones marginales, por independencia de variables aleatorias conjuntas, se tiene

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

sustituyendo

$$\frac{1}{96}xy = \left(\frac{1}{8}x\right)\left(\frac{1}{12}y\right) = \frac{1}{96}xy$$

Por lo tanto son variables aleatorias conjuntas estadísticamente independientes, la covariancia es igual a cero.

Problema 6

En un espacio de la Facultad de Ingeniería se tienen 5000 varillas almacenadas, para la construcción del **edificio X**, con media de 5.02 kilogramos y desviación estándar 0.3 kilogramos. Obtener las probabilidades de que una muestra aleatoria de 100 varillas tenga un peso,

a) Entre 500 y 596 kilogramos.

b) Mayor de 510 kilogramos.

15 Puntos

Resolución

De los datos del enunciado

$\mu = 5.02$ kilogramos

$\sigma = 0.3$ kilogramos

$n = 100$
$N = 5000$
Sea X_i la variable aleatoria que representa el peso de la varilla i .

a) $P\left(500 < \sum_{i=1}^{100} X_i < 596\right) = P(5 < \bar{X} < 5.96)$

puesto que se realiza muestreo aleatorio simple sin reemplazo

$\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 5.02$ kilogramos

$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}\frac{N-n}{N-1} = \frac{(0.3)^2}{100}\frac{5000-100}{5000-1} =$ 0.0008822

y del Teorema del Límite Central, se tiene que la aproximación por distribución normal, es

$\bar{X} \sim Normal\left(\mu_{\bar{X}} = 5.02\, , \sigma_{\bar{X}}^2 = 0.0008822\right)$

entonces, se sabe que

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}\frac{N-n}{N-1}}}$$

$P(-0.67 < Z < 31.65) = F_Z(31.65) - F_Z(-0.67) = 1 - 0.2514 = 0.7486$

b) $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 510\right) = P(\bar{X} > 5.1) = P(Z > 2.69) = 1 - F_Z(2.69) = 1 - 0.9964 = 0.0036$

Problema 7

Los datos de la tabla representan, de una muestra de seis estudiantes, las calificaciones del examen diagnóstico (x) que se realiza previamente al ingreso de una Escuela de Ingeniería y las calificaciones respectivas en el curso de Matemáticas I (y), que los mismos alumnos cursaron posteriormente durante el primer semestre, del troco común de las carreras profesionales que esta Escuela imparte.

Estudiante	1	2	3	4	5	6
Calificación examen diagnóstico	3.9	4.1	6.2	5.5	6.0	6.7
Calificaciones del curso de Matemáticas I	5.0	6.0	9.0	8.0	7.0	9.0

a) Estimar la recta de regresión por el método de mínimos cuadrados.
b) Calcular el coeficiente de correlación. Dar una interpretación del resultado.
c) De acuerdo a la tendencia que manifiestan los datos bivariados, sí un alumno que en el examen diagnóstico obtuvo una calificación de 4.9 ¿cuál es la calificación más aceptable que se puede estimar que tendría en el curso de Matemáticas I?

15 Puntos

Resolución

Calificación examen diagnóstico	Calificación del curso de Matemáticas I	xy	x^2	y^2
3.9	5.0	19.5	15.21	25
4.1	6.0	24.6	16.81	36
6.2	9.0	55.8	38.44	81
5.5	8.0	44	30.25	64
6.0	7.0	42	36	49
6.7	9.0	60.3	44.89	81
32.4	44.0	246.2	181.6	336.0

a) La estimación de la recta de regresión está dada por

$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$

donde se sabe que los promedios están definidos por

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{6} x_i \quad , \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{6} y_i$$

sustituyendo los valores de las sumas en los promedios

$$\overline{x} = \frac{32.4}{6} = 5.4 \quad , \quad \overline{y} = \frac{44}{6} = 7.333$$

los estimadores se definen por

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i \sum_{i=1}^{6} y_i}{6}}{\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^2}{6}} = \frac{246.2 - \frac{(32.4)(44)}{6}}{181.6 - \frac{(32.4)^2}{6}} = \frac{8.600}{6.640} \approx 1.295$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x}$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x} = 7.333 - (1.295)(5.4) \approx 0.339$$

Por lo tanto el modelo está dado por

$\hat{y} = 1.295x + 0.339$

b) Como el coeficiente de determinación se utiliza como medida de eficacia de la regresión, éste se calculará a partir del cuadrado del coeficiente de correlación.

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}\, SS_{yy}}}$$

$$SS_{xx} = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^2}{6} = 181.6 - \frac{(32.4)^2}{6} = 6.640$$

$$SS_{yy} = \sum_{i=1}^{6} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{6} y_i\right)^2}{6} = 336 - \frac{(44)^2}{6} = 13.333$$

$$SS_{xy} = \sum_{i=1}^{6} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i \sum_{i=1}^{6} y_i}{6} = 246.2 - \frac{(32.4)(44)}{6} = 8.6$$

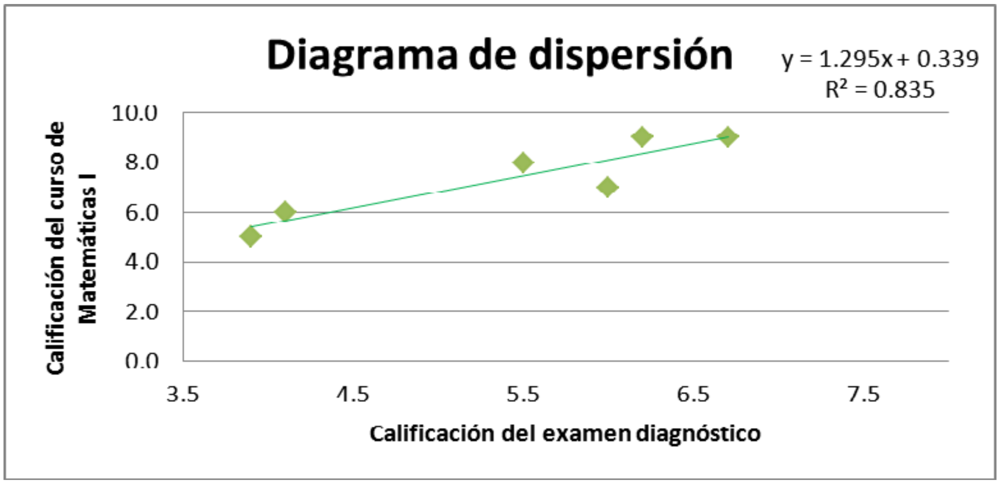
sustituyendo

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}\,SS_{yy}}} = \frac{8.6}{\sqrt{(6.640)(13.333)}} \approx 0.914$$

entonces el coeficiente de determinación es

$$r^2 = R^2 = \frac{SS_{xy}^2}{SS_{xx}SS_{yy}} = \frac{(8.6)^2}{\left(\sqrt{(6.640)(13.333)}\right)^2} \approx 0.835$$

Del resultado anterior, se puede observar y concluir, que el coeficiente de determinación es $r^2 \approx 0.835$, esto es, 83.5 % y no es tan cercano al 100%, por lo que se considera que el modelo lineal es suficiente para esta muestra de exámenes.



c) Si x= 4.9 entonces

$$\hat{y} = 1.295(4.9) + 0.339 = 6.685$$

Esto es, si un alumno obtiene una calificación de 4.9 en el examen diagnóstico se esperaría que su calificación en Matemáticas I sea de 6.69

	Valores de la función de distribución acumulativa normal estándar									
z	**0**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641