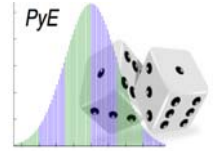




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
PRIMER EXAMEN FINAL
RESOLUCIÓN



SEMESTRE 2011 - 2
DURACIÓN MÁXIMA 2.5 HORAS

TIPO 1
JUNIO 1, 2011

NOMBRE _____

Apellido Paterno

Apellido Materno

Nombre(s)

1. Los datos que se muestran en la tabla de frecuencias, obtenidos por la observación de una cámara oculta, corresponden a las velocidades, para una muestra aleatoria de 37 coches que recorren el circuito interior en CU, donde se permite circular hasta 40 kilómetros por hora.

Velocidad km/h	Fronteras de Clase	Número de coches f_i	Marcas de Clase x_i	Frecuencia Acumulada Absoluta F_i	Frecuencia Relativa f_i^*	Frecuencia Acumulada Relativa F_i^*
1.00 -		3				
						0.135
				10		
						0.541
- 30.0		10				

- a) Completar la tabla de frecuencias con los datos faltantes e identificar la amplitud (o longitud) de clase y la unidad de precisión de los datos.
 b) Calcular la media.
 c) Determinar la desviación estándar.
 d) Interpretar el coeficiente de variación.

20 Puntos
Resolución

- a) La tabla de frecuencias completa es:

Velocidad Km/h	Fronteras de Clase	Número de coches f_i	Marca de Clase x_i	Frecuencia Acumulada Absoluta F_i	Frecuencia Relativa f_i^*	Frecuencia Acumulada Relativa F_i^*
1.0 – 5.0	0.5 - 5.5	3	3	3	0.081	0.081
6.0 – 10.0	5.5 – 10.5	2	8	5	0.054	0.135
11.0 – 15.0	10.5 – 15.5	5	13	10	0.135	0.270
16.0 – 20.0	15.5 – 20.5	10	18	20	0.270	0.541
21.0 – 25.0	20.5 – 25.5	7	23	27	0.189	0.730
26.0 - 30.0	25.5 – 30.5	10	28	37	0.270	1.000
		37				

La amplitud de cada clase es de 5 km/h.
 La precisión de los datos es 1

- b) La media de la velocidad en kilómetros por hora es:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^6 x_i f_i = \sum_{m=1}^6 x_i f_i^*$$

sustituyendo:

$$\bar{x} = \frac{1}{37} [(3)(3) + (8)(2) + (13)(5) + (18)(10) + (23)(7) + (28)(10)] = \frac{711}{37} \approx 19.216 \text{ km/h}$$

- c) La desviación estándar de la muestra en kilómetros por hora, está dada por:

$$s_{(n-1)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 f_i}$$

sustituyendo se tiene:

$$s_{(n-1)} = \sqrt{\frac{1}{37-1} [(3-19.216)^2 (3) + (8-19.216)^2 (2) + (13-19.216)^2 (5) + (18-19.216)^2 (10) + (23-19.216)^2 (7) + (28-19.216)^2 (10)]}$$

$$s_{(n-1)} = \sqrt{\frac{1}{36} (2120.270)} \approx 7.674 \text{ km/h}$$

- d) El coeficiente de variación se define como:

$$CV = \frac{s_{n-1}}{\bar{x}}$$

sustituyendo la media y desviación estándar de la muestra, se tiene:

$$cv = \frac{7.674}{19.216} \approx 0.399$$

Del resultado anterior, la variabilidad de la velocidad de los autos que circulan por el circuito interior en CU, es relativamente alta, ya que 39.9% nos indica que cada persona conduce a la velocidad que quiere, es muy disperso.

2. En una determinada gasolinera, el 25% de los clientes utilizan gasolina Premium para sus vehículos, el 55% usan gasolina Magna, y el resto utilizan gasolina Alternativa (Etanol). De los clientes que consumen gasolina Premium sólo el 30% de ellos llenan sus tanques, de los que usan gasolina Magna el 60% llenan sus tanques, en tanto que los que prefieren gasolina Alternativa el 50% llenan los tanques de sus automóviles.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente pida al servidor llenar su tanque?
- b) Si el siguiente cliente llena su tanque, ¿qué probabilidad hay de que solicite al servidor gasolina Magna?
- c) Si el siguiente cliente no llena su tanque ¿qué probabilidad hay de que pida al servidor gasolina Alternativa?

15 Puntos Resolución

Sean los eventos que representan a:

- A_1 : Los clientes que utilizan gasolina Premium.
 A_2 : Los clientes que utilizan gasolina Magna.
 A_3 : Los clientes que utilizan gasolina Alternativa (Etanol).
 B : Los clientes que llenan el tanque.

Del enunciado se tiene los siguientes datos:

$$\begin{array}{lll} P(A_1) = 0.25 & P(A_2) = 0.55 & P(A_3) = 0.20 \\ P(B|A_1) = 0.30 & P(B|A_2) = 0.60 & P(B|A_3) = 0.50 \end{array}$$

- a) Se pide obtener $P(B)$, que es la Probabilidad Total, entonces:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

$$P(B) = (0.25)(0.30) + (0.55)(0.60) + (0.20)(0.50) \approx 0.505$$

- b) Si el siguiente cliente llena su tanque con gasolina, cuál es la probabilidad de que solicite gasolina Magna, aplicando Teorema de Bayes, entonces:

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{(0.55)(0.60)}{0.505} \approx 0.653$$

- c) Determinar la probabilidad de que un cliente pida gasolina alternativa, dado que no llena su tanque, entonces del Teorema de Bayes, del enunciado se sabe que:

$$P(\bar{B}|A_1) = 0.70 \quad P(\bar{B}|A_2) = 0.40 \quad P(\bar{B}|A_3) = 0.50$$

$$P(A_3|\bar{B}) = \frac{P(A_3 \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A_3)P(\bar{B}|A_3)}{1 - P(B)} = \frac{(0.20)(0.50)}{1 - 0.505} = \frac{0.1}{0.495} \approx 0.202$$

3. En un examen de Probabilidad y Estadística el promedio de calificaciones fue de seis con desviación estándar de 0.8. El profesor conjetura que el examen fue difícil. ¿Qué transformación del tipo $aX + b$ debe hacer para que la media sea de siete y la desviación estándar igual a uno? (X es la variable aleatoria que representa las calificaciones del grupo).

15 Puntos

Resolución

Sea X la variable aleatoria que representa las calificaciones de los estudiantes.

El ajuste que el profesor quiere realizar es:

$$C = aX + b$$

Del valor esperado y la variancia, se quiere $E(C) = 7$ y $Var(C) = 1$, por lo que:

$$E(C) = E(aX + b) = aE(X) + b$$

sustituyendo:

$$7 = 6a + b$$

Aplicando propiedades de la variancia, se tiene:

$$Var(C) = Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

sustituyendo:

$$1 = a^2 (0.8)^2$$

Despejando y determinando los valores buscados para el ajuste:

$$a^2 = \frac{1}{(0.8)^2}$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{1}{(0.8)^2}} = \pm \frac{1}{0.8} = \pm \frac{5}{4}$$

De lo que, sólo se trabaja la parte positiva, entonces: $a = \frac{5}{4}$

Sustituyendo el valor calculado:

$$7 = 6\left(\frac{5}{4}\right) + b$$

Se tiene el valor de:

$$b = 7 - \left(\frac{5}{4}\right)6 = 7 - \frac{30}{4} = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto el ajuste a realizar por parte del profesor es:

$$C = \frac{5}{4}X - \frac{1}{2} = 1.25x - 0.5$$

4. El 2% de los tornillos fabricados por una máquina presentan defectos. Si se tiene un lote de 2000 tornillos, ¿cuál es la probabilidad de que haya menos de 50 tornillos defectuosos?

15 Puntos
Resolución

Sea X la variable aleatoria que representa el número de tornillos defectuosos que se tienen cuando se seleccionan para revisión.

$$X \sim \text{Binomial}(n = 2000, p = 0.02)$$

Se pide determinar la probabilidad de que haya a lo más 50 tornillos defectuosos, esto es:

$$P(X \leq 50) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = 50)$$

$$P(X \leq 50) = \sum_{x=0}^{50} \binom{2000}{x} (0.02)^x (0.98)^{2000-x} \approx 0.949$$

O bien, aproximando con distribución normal ya que $\mu = np = (2000)(0.02) = 40 \geq 20$ es una buena aproximación, entonces:

$$Y \sim \text{Normal}[\mu = np = (2000)(0.02) = 40, \sigma^2 = npq = (2000)(0.02)(0.98) = 39.2]$$

$$Y \sim \text{Normal}(\mu = 40, \sigma^2 = 39.2)$$

por aproximación se tiene:

$$P(Y \leq 50) \approx P\left(\frac{Y - \mu + \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}} \leq \frac{50 - 40 + \frac{1}{2}}{\sqrt{39.2}}\right) = P\left(Z \leq \frac{10.5}{\sqrt{39.2}}\right) = P(Z \leq 1.68) \approx F_Z(1.68) = 0.9535$$

De otra forma, al usar calculadora con distribución normal se tiene:

$$Y \sim \text{Normal}(\mu = 40, \sigma^2 = 39.2)$$

$$P(Y \leq 50) \approx 0.9535$$

También podría darse el caso, de no usar el factor por continuidad de un medio, entonces:

$$P(Y \leq 50) \approx P\left(\frac{Y - \mu}{\sqrt{npq}} \leq \frac{50 - 40}{\sqrt{39.2}}\right) = P\left(Z \leq \frac{10}{\sqrt{39.2}}\right) = P(Z \leq 1.60) = F_Z(1.60) = 0.9452$$

5. Supóngase que los tiempos requeridos por un cierto autobús para alcanzar uno de sus destinos a una ciudad grande, tiene distribución normal con desviación estándar de un minuto. Si se elige al azar una muestra aleatoria de 17 tiempos. Obtener la probabilidad de que la variancia muestral sea mayor que dos e interpretar el resultado.

15 Puntos
Resolución

Se pide determinar la probabilidad de que la variancia de la muestra aleatoria $(S_{(n-1)}^2)$, sea mayor que

$$2, \text{ esto es: } P(S_{(n-1)}^2 > 2)$$

Por lo tanto, transformando en Ji cuadrada, se tiene:

$$P\left(S_{(n-1)}^2 > 2\right) \approx P\left(\frac{(n-1)S_{(n-1)}^2}{\sigma^2} > \frac{(16)2}{1}\right) = P\left(X_{(16,\alpha)}^2 > 32\right) = \alpha$$

De tablas de la distribución Ji cuadrada con 16 grados de libertad y abscisa 32:

$$\alpha = 0.01$$

En caso de utilizar calculadora:

$$P\left(X_{(16,\alpha)}^2 > 32\right) = 0.01$$

es poco probable que la variancia sea la establecida.

6. Dos oftalmólogos se asociaron para poner una clínica en la que, por la subespecialidad, él puede atender hasta cinco pacientes por día y ella puede atender hasta tres pacientes por día. Si (X, Y) es un vector aleatorio, sea X la variable aleatoria que representa el número de pacientes atendidos por el doctor y, sea Y la variable aleatoria que representa el número de pacientes atendidos por la doctora, según la tabla que muestra la función masa de probabilidad conjunta.

$f_{XY}(x, y)$		X					
		0	1	2	3	4	5
Y	0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
	1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
	2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
	3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

- Determinar las funciones marginales masa de probabilidad de X y Y
- Obtener la probabilidad de que entre los dos especialistas atiendan al menos a seis pacientes en un día cualquiera.
- Determinar la función de probabilidad para el número de pacientes que atiende la doctora, si se sabe que el doctor atiende a lo más tres pacientes.
- ¿Son variables aleatorias conjuntas estadísticamente independientes?

20 Puntos Resolución

Sea X la variable aleatoria que representa el número de pacientes atendidos por día por el doctor.
Sea Y la variable aleatoria que representa el número de pacientes atendidos por día por la doctora.
Los recorridos de las variables aleatorias son: $R_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $R_Y = \{0, 1, 2, 3\}$

- a) Las funciones marginales se definen como:

$$f_X(x) = \sum_{\forall R_Y} f_{XY}(x, y)$$

y

$$f_Y(y) = \sum_{\forall R_X} f_{XY}(x, y)$$

entonces:

x	0	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	0.03	0.08	0.16	0.21	0.24	0.28

y la otra función marginal está dada por:

y	0	1	2	3
$f_Y(y)$	0.25	0.26	0.25	0.24

- b) La probabilidad a calcular es:

$$P(X + Y \geq 6)$$

entonces por extensión es:

$$P(X + Y \geq 6) = f_{XY}(3,3) + f_{XY}(4,2) + f_{XY}(4,3) + f_{XY}(5,1) + f_{XY}(5,2) + f_{XY}(5,3)$$

de la función de probabilidad conjunta, sustituyendo:

$$P(X + Y \geq 6) = 0.06 + 0.05 + 0.06 + 0.08 + 0.06 + 0.05 = 0.36$$

- c) Para determinar la función de probabilidad condicional, de la definición se tiene:

$$f_{Y|X \leq 3}(Y|X \leq 3) = \begin{cases} \frac{f_{XY}(X \leq 3, y)}{f_X(X \leq 3)} & ; f_X(X \leq 3) > 0 \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

De la función marginal de $f_X(X \leq 3)$:

$$f_X(X \leq 3) = \sum_{x=0}^3 f_X(x) = f_X(X=0) + f_X(X=1) + f_X(X=2) + f_X(X=3) = 0.48$$

sustituyendo se tiene:

y	0	1	2	3
$f_{Y X \leq 3}(Y X \leq 3)$	$\frac{0.09}{0.48}$	$\frac{0.12}{0.48}$	$\frac{0.14}{0.48}$	$\frac{0.13}{0.48}$
$f_{Y X \leq 3}(Y X \leq 3)$	0.188	0.250	0.292	0.271

- d) Para determinar si son variables aleatorias conjuntas independientes, de la definición se sabe:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

para todos los vectores aleatorios, entonces:

$$f_{XY}(0,0) = f_X(0) f_Y(0)$$

$$0 \neq (0.03)(0.25) = 0.0075$$

por lo tanto no son variables independientes, ya que $f_{XY}(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ son diferentes.