UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
SEGUNDO EXAMEN FINAL
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2011 - 2 **TIPO 1**
DURACIÓN MÁXIMA 2.5 HORAS **JUNIO 8, 2011**

NOMBRE____
Apellido Paterno **Apellido Materno** **Nombre(s)**

1. En una clase hay 30 alumnos, de los cuales 20 estudian inglés, 12 estudian francés y seis estudian los ambos idiomas. Se elige a un alumno al azar y se denotan:

Sea A el evento que representa el alumno elegido aleatoriamente estudia inglés

Sea B el evento que representa el alumno elegido aleatoriamente estudia francés

Determinar las probabilidades de:

a) $P(A\cup B)$, $P(A\cup \bar{B})$ y $P(A|A\cup \bar{B})$

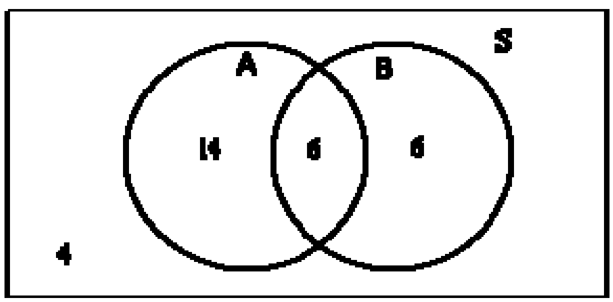
b) Explicar a qué se refiere cada probabilidad del inciso a).

15 Puntos
Resolución

Se define:

Sea A el evento que representa el alumno elegido aleatoriamente *estudia inglés*

Sea B *el evento que representa el alumno elegido* aleatoriamente *estudia* francés



a) Se pide calcular $P(A\cup B)$ que es igual a:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

sustituyendo los datos del enunciado:

$$P(A\cup B)=\frac{20}{30}+\frac{12}{30}-\frac{6}{30}=\frac{26}{30}=\frac{13}{15}\approx 0.867$$

La segunda parte de la pregunta del inciso a), se pide calcular:

$$P(A\cup \bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A\cap \bar{B})$$

Al sustituir los datos del enunciado, se tiene:

$$P(A\cup \bar{B})=\frac{20}{30}+\frac{18}{30}-\frac{14}{30}=\frac{24}{30}=\frac{12}{15}=0.8$$

De la tercera pregunta del inciso a), se va a calcular, al usar teoremas de la teoría de conjuntos, donde $A\cup \bar{B}$ es el espacio reducido:

$$P(A|A\cup \bar{B})=\frac{P(A\cap(A\cup \bar{B}))}{P(A\cup \bar{B})}=\frac{P((A\cap A)\cup(A\cap \bar{B}))}{P(A\cup \bar{B})}=\frac{P(A\cup(A-B))}{P(A\cup \bar{B})}=\frac{P(A)}{P(A\cup \bar{B})}$$

$$P\left(A \middle| A\cup\bar{B}\right)=\frac{\frac{20}{30}}{\frac{24}{30}}=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}\approx 0.833$$

b) A qué se refiere cada probabilidad del inciso a):

$P\left(A\cup B\right)$ *Seleccionar al menos a un alumno que estudie inglés o francés.*

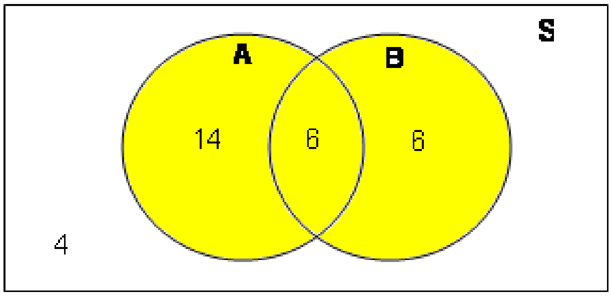


Diagrama de Venn $P\left(A\cup B\right)$

$P\left(A\cup\bar{B}\right)$ *Seleccionar a un alumno que estudie inglés o que no estudie francés.*

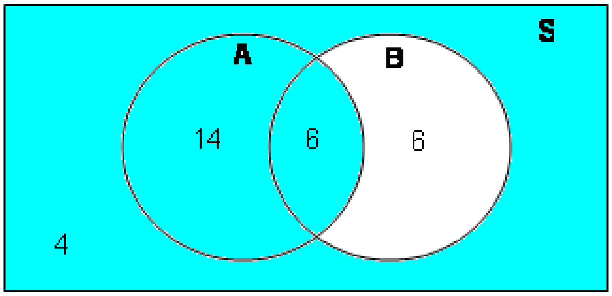


Diagrama de Venn $P\left(A\cup\bar{B}\right)$

$P\left(A \middle| A\cup\bar{B}\right)$ *Seleccionar a un alumno que estudie inglés, si se sabe que estudia inglés o que no estudia francés.*

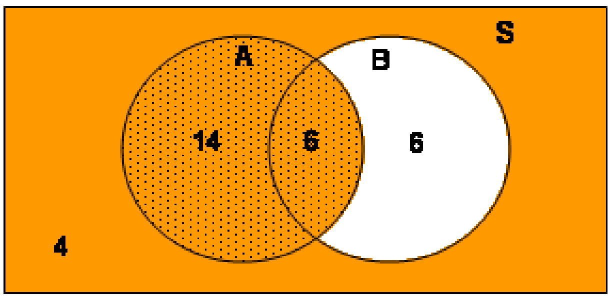


Diagrama de Venn $P\left(A \middle| A\cup\bar{B}\right)$

2. Supóngase que la función de distribución acumulativa de la variable aleatoria X que mide el índice de octano en motores de combustión interna es:

$$F_X\left(x\right)=6.25x^2-1.25x+0.0625$$

La variable aleatoria está definida entre 0.1 y 0.5

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el índice de octano esté entre 0.20 y 0.30?

b) Obtener el promedio de octano en un litro de gasolina.

15 Puntos
Resolución

La probabilidad de que el índice de octano esté entre 0.20 y 0.30, al utilizar la función acumulativa, está dada por:

$$P(0.20 < X < 0.30) = P(0.20 \le X \le 0.30) = F_X(0.30) - F_X(0.20)$$

$$P(0.20 < X < 0.30) = 6.25(0.30)^2 - 1.25(0.30) + 0.0625 - \left[6.25(0.20)^2 - 1.25(0.20) + 0.0625\right]$$

$$P(0.20 < X < 0.30) = 0.25 - 0.0625 = 0.188$$

a) Para calcular el promedio del índice de octano, primero se debe determinar la función de densidad, se sabe que:

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$$

para el caso, se tiene:

$$f_X(x) = 12.5x - 1.25$$

por lo tanto la función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 12.5x - 1.25 & ; \quad 0.1 \le x \le 0.5 \\ 0 & ; \quad \textit{en otro caso} \end{cases}$$

El valor esperado del índice de octano por litro, es:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

sustituyendo:

$$E(X) = \int_{0.1}^{0.5} x\,(12.5x - 1.25)\, dx = 12.5\int_{0.1}^{0.5} x^2 \, dx - 1.25\int_{0.1}^{0.5} x \, dx$$

$$E(X) = \frac{12.5}{3}\left[x^3\right]_{0.1}^{0.5} - \frac{1.25}{2}\left[x^2\right]_{0.1}^{0.5} = \frac{12.5}{3}\left[(0.5)^3 - (0.1)^3\right] - \frac{1.25}{2}\left[(0.5)^2 - (0.1)^2\right]$$

$$E(X) = 0.516 - 0.15 = 0.367$$

3. El número promedio de camiones tanque que llega diario a Salina Cruz, Oaxaca, es tres. Las instalaciones en el puerto manejan a lo más cinco camiones tanque por día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día cualquiera los camiones se tengan que regresar?

b) En los primeros ocho días de cualquier mes, ¿cuál es la probabilidad de que el octavo día del mes, sea el cuarto día en que los camiones tanque se tengan que regresar?

15 Puntos
Resolución

a) Sea Y la variable aleatoria que representa el número de camiones tanque que llega en un día a Salina Cruz, Oaxaca.

$$Y \sim Poisson\left(\lambda = 3 \ \frac{camiones}{día}\right)$$

La probabilidad de que en un día cualquiera, los camiones tanque se tengan que regresar, es:

$$P(Y > 5) = P(Y = 6) + P(Y = 7) + P(Y = 8) + ...$$

$$P(Y > 5) = 1 - P(Y \le 5) = 1 - \left[P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) + P(Y = 5)\right]$$

sustituyendo los valores:

$$P(Y > 5) = 1 - \sum_{y=0}^{5} \frac{3^y e^{-3}}{y!} = 1 - e^{-3}\sum_{y=0}^{5} \frac{3^y}{y!} = 1 - 0.916 \approx 0.084$$

b) Sea R la variable aleatoria que representa el octavo día del mes, para que el cuarto día en que los camiones tanque se tengan que regresar, cuando llegan a Salina Cruz, Oax.

$$R \sim Pascal(r = 4\ ,\ p = 0.084)$$

con lo que se va a calcular:

$$P\left(R=8\right)=\binom{7}{3}\left(0.084\right)^4\left(1-0.084\right)^4=\binom{7}{3}\left(0.084\right)^4\left(0.916\right)^4\approx 0.001$$

4. Supóngase que la función de densidad de probabilidad conjunta de un vector aleatorio $\left(T\ ,\ \mathrm{U}\right)$ es:

$$f_{TU}\left(t\ ,\ u\right)=\begin{cases} 2e^{-\left(2t+u\right)} & ;\quad t>0\ \ ,\ \ u>0 \\ 0 & ;\quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

donde T es el tiempo de espera en cola, en minutos, de los clientes en la caja normal de un pequeño supermercado y U es el tiempo de espera en cola, en minutos, de los clientes en la caja rápida.

a) Determinar las funciones marginales de densidad de T y U

b) Calcular la probabilidad de que el tiempo de espera en cola en la caja rápida sea mayor que el tiempo de espera en la caja normal.

c) Obtener la función de densidad condicional del tiempo de espera en cola de la caja normal, dado que el tiempo de espera en la cola de la caja rápida es de un minuto.

d) Calcular el coeficiente de correlación e interpretar el resultado.

20 Puntos

Resolución

Sea T la variable aleatoria que representa el tiempo de espera en la cola de la caja normal.
Sea U la variable aleatoria que representa el tiempo de espera en la cola de la caja rápida.

a) Las funciones marginales están definidas como:

$$f_T\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{TU}\left(t,u\right)\ du$$

y

$$f_U\left(u\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{TU}\left(t,u\right)\ dt$$

para el caso, sustituyendo:

$$f_T\left(t\right)=\int_0^{+\infty} 2\ e^{-\left(2t+u\right)}\ du=\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\mathrm{R}} 2\ e^{-\left(2t+u\right)}\ du=2\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\mathrm{R}} e^{-\left(2t+u\right)}\ du$$

$$f_T\left(t\right)=2\lim_{R\to+\infty}\left[-e^{-\left(2t+u\right)}\right]_0^R=-2\lim_{R\to+\infty}\left[e^{-\left(2t+u\right)}\right]_0^R=-2\lim_{R\to+\infty}\left(\left[e^{-\left(2t+R\right)}\right]-\left[e^{-\left(2t+0\right)}\right]\right)=2e^{-2t}\ ;\ t>0$$

la otra función marginal, está dada por:

$$f_U\left(u\right)=\int_0^{+\infty} 2\ e^{-\left(2t+u\right)}\ dt=\lim_{P\to+\infty}\int_0^{\mathrm{P}} 2\ e^{-\left(2t+u\right)}\ dt=2\lim_{P\to+\infty}\int_0^{\mathrm{P}} e^{-\left(2t+u\right)}\ dt$$

$$f_U\left(u\right)=2\lim_{P\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-\left(2t+u\right)}\right]_0^{\mathrm{P}}=-\lim_{P\to+\infty}\left[e^{-\left(2t+u\right)}\right]_0^{\mathrm{P}}=-\lim_{P\to+\infty}\left(\left[e^{-\left(2P+u\right)}\right]-\left[e^{-\left(0+u\right)}\right]\right)=e^{-u}\ ;\ \mathrm{u}>0$$

por tanto, las funciones marginales son:

$$f_T\left(t\right)=\begin{cases} 2e^{-2t} & ;\quad t>0 \\ 0 & ;\quad en\ otro\ caso \end{cases}\qquad\qquad f_U\left(u\right)=\begin{cases} e^{-u} & ;\quad u>0 \\ 0 & ;\quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

b) La probabilidad de que el tiempo de espera en cola en la caja rápida sea mayor que el tiempo de espera en la caja normal, significa que:

$P\left(U>T\right)=P\left(U-T>0\right)$

De las propiedades de la función de densidad conjunta, se sabe que:

$$P\left(\left(T,U\right)\in R\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{TU}\left(t,u\right)\ dt\ du$$

sustituyendo:

$$P(U>T)=\int_0^{\infty}\int_t^{\infty} 2\,e^{-(2t+u)}\,du\,dt=2\lim_{S\to+\infty}\left[\int_0^{S}\lim_{R\to+\infty}\left[\int_t^{R} e^{-(2t+u)}\,du\right]dt\right]$$

$$P(U>T)=-2\lim_{S\to+\infty}\left[\int_0^{S}\lim_{R\to+\infty}\left[e^{-(2t+u)}\right]_t^{R}dt\right]=-2\lim_{S\to+\infty}\left[\int_0^{S}\lim_{R\to+\infty}\left[\left(e^{-(2t+R)}\right)-\left(e^{-(2t+t)}\right)\right]dt\right]$$

$$P(U>T)=-2\lim_{S\to+\infty}\left[\int_0^{S}\lim_{R\to+\infty}\left[\left(e^{-(2t+R)}\right)-\left(e^{-3t}\right)\right]dt\right]=-2\lim_{S\to+\infty}\left[\int_0^{S}\left[(0)-\left(e^{-3t}\right)\right]dt\right]$$

$$P(U>T)=2\lim_{S\to+\infty}\left[\int_0^{S}e^{-3t}\,dt\right]=-\frac{2}{3}\lim_{S\to+\infty}\left[e^{-3t}\right]_0^{S}=-\frac{2}{3}\lim_{S\to+\infty}\left[e^{-3S}-1\right]=\frac{2}{3}\approx 0.666$$

c) Para determinar la función de densidad condicional del tiempo de espera en la cola de la caja normal, cuando el tiempo de espera en la cola de la caja rápida es de un minuto. De la definición de función condicional, se sabe que:

$$f_{T|U=u}(t|u_0)=\begin{cases}\dfrac{f_{TU}(t,u_0)}{f_U(u_0)} & ; \quad f_U(u_0)>0\\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso\end{cases}$$

sustituyendo:

$$f_{T|U=1}(t|u=1)=\begin{cases}\dfrac{2e^{-(2t+1)}}{e^{-1}} & ; \quad t>0\\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso\end{cases}$$

simplificando:

$$f_{T|\,U=1}(t|u=1)=\begin{cases}2e^{-2t} & ; \quad t>0\\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso\end{cases}$$

d) Para determinar si es independiente permanecer en la cola normal o rápida, por independencia de variables aleatorias conjuntas, se sabe que:

$$f_{T|U}(t|u)=f_T(t)$$

entonces son variables aleatorias conjuntas independientes, sustituyendo:

$$f_{T|U}(t|u)=f_T(t)$$

$$2e^{-2t}=2e^{-2t}$$

por tanto, sí son independientes.

Dado que la permanencia en las colas normal y rápida es independiente, entonces la covariancia vale cero y la correlación también.

$Cov(T,U)=0$ y $\rho(T,U)=0$

5. Si la vida media de operación de una pila de linterna es de 24 horas y está distribuida normalmente con una desviación estándar de tres horas. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 100 pilas, tenga una media muestral que se desvíe más de 30 minutos del promedio real?

15 Puntos

Resolución

Sea Y_i la variable aleatoria que representa la vida de operación de una pila de linterna.

$$Y_i \sim Normal\left(\mu_{Y_i}=24\ h\ ,\ \sigma_{Y_i}=3\ \mathrm{h}\right)\quad ,\quad i=1,2,3,4,\ldots,100$$

Por el Teorema del Límite Central, para el promedio de vida de operación de la muestra aleatoria:

$$\overline{Y}\sim Normal\left(\mu_{\overline{Y}}=\mu_{Y_i}\ ,\ \sigma_{\overline{Y}}=\frac{\sigma_{Y_i}}{\sqrt{n}}\right)$$

sustituyendo:

$$\bar{Y} \sim Normal\left(\mu_{\bar{Y}} = 24\ h\ ,\ \sigma_{\bar{Y}} = \frac{3}{10}\ h\right)$$

La probabilidad de que la muestra aleatoria de 100 pilas, tenga un promedio que se desvíe más de 30 minutos de su promedio, esto es:

$$P\left(\left|\bar{Y} - \mu_Y\right| > 30\right) = P\left(\left|\bar{Y} - \mu_Y\right| > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(\left|\bar{Y} - \mu_Y\right| < \frac{1}{2}\right)$$

entonces:

$$P\left(\left|\bar{Y} - \mu_Y\right| < \frac{1}{2}\right) = P\left(-\frac{1}{2} < \bar{Y} - \mu_Y < \frac{1}{2}\right) \approx P\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{10}} < \frac{\bar{Y} - \mu_Y}{\frac{\sigma_{Y_i}}{\sqrt{n}}} < \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{10}}\right) = P\left(\frac{-10}{6} < Z < \frac{10}{6}\right)$$

$$P\left(\left|\bar{Y} - \mu_Y\right| < \frac{1}{2}\right) = P\left(-1.67 < Z < 1.67\right) = F_Z\left(1.67\right) - F_Z\left(-1.67\right) \approx 0.9525 - 0.0475 \approx 0.905$$

$$P\left(\left|\bar{Y} - \mu_Y\right| > \frac{1}{2}\right) = 1 - 0.905 = 0.095$$

Al usar calculadora o excel:

$$P\left(\left|\bar{Y} - \mu_Y\right| > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(\left|\bar{Y} - \mu_Y\right| < \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(-1.67 < Z < 1.67\right) = 1 - \left[F_Z\left(1.67\right) - F_Z\left(-1.67\right)\right] \approx 1 - \left[0.9525 - 0.0475\right] \approx 0.095$$

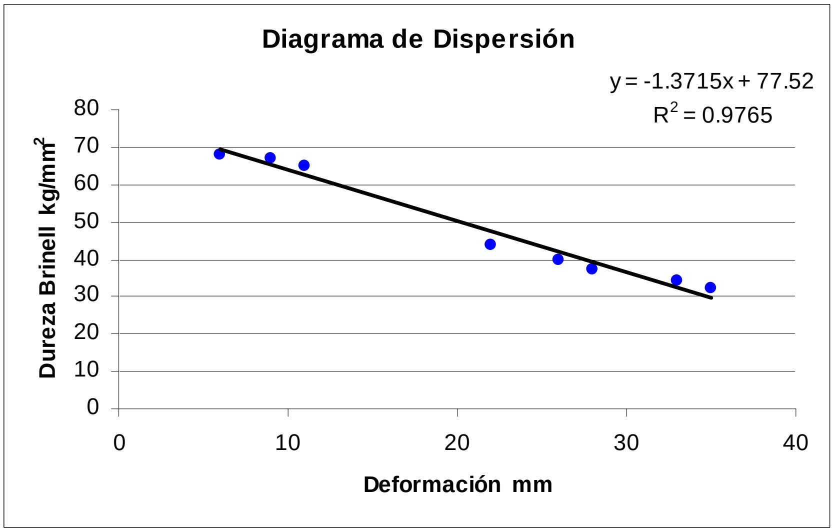
6. En la producción de herramientas de acero, se ha considerado ilustrar la relación entre la deformación (x) y la dureza Brinell (y)

$x\ [mm]$	6	9	11	22	26	28	33	35
$y\ \left[\frac{kg}{mm^2}\right]$	68	67	65	44	40	37	34	32

a) Elaborar el diagrama de dispersión.
b) Estimar la recta de regresión.
c) Interpretar el resultado del coeficiente de determinación.

20 Puntos
Resolución

a)



b) El ajuste de los datos a un modelo lineal de regresión por el criterio de mínimos cuadrados está dado por:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\, x$$

donde

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1\,\overline{x} \qquad\qquad \hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}$$

Al realizar los productos y las sumas, se tiene

	x	y	x^2	y^2	xy
	6	68	36	4624	408
	9	67	81	4489	603
	11	65	121	4225	715
	22	44	484	1936	968
	26	40	676	1600	1040
	28	37	784	1369	1036
	33	34	1089	1156	1122
	35	32	1225	1024	1120
Suma:	**170**	**387**	**4496**	**20423**	**7012**

de donde:

$$SS_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n} = 4496 - \frac{(170)^2}{8} = 883.5$$

$$SS_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = 7012 - \frac{(170)(387)}{8} = -1211.75$$

sustituyendo:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} = \frac{-1211.75}{883.5} = -1.375$$

para calcular los promedios:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{8}(170) = 21.25$$

y

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{8}(387) = 48.375$$

sustituyendo:

$$\hat{\beta}_0 = 48.375 - (-1.372)(21.25) = 77.52$$

por lo tanto el modelo de regresión lineal es:

$$\hat{y} = -1.3715\,x + 77.52$$

c) El coeficiente de correlación está definido por

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}\,SS_{yy}}}$$

Al realizar los cálculos necesarios:

$$SS_{yy}=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}{n}=20423-\frac{(387)^2}{8}=1701.875$$

por lo que el coeficiente de correlación es:

$$r=\frac{-1211.75}{\sqrt{(883.5)(1701.875)}}=-0.988$$

El coeficiente de determinación está definido por:

$$R^2=(r)^2=(-0.988)^2=0.9765$$

Se concluye que el modelo explica muy bien a la variable de entrada, ya que es muy bueno el porcentaje de explicación: $R^2=0.9765$

Valores de la función de distribución acumulativa normal estándar

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641