UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
PRIMER EXAMEN FINAL
RESOLUCIONES

SEMESTRE 2011-1 **TIPO 1**
DURACIÓN MÁX. 2.5 HORAS **DICIEMBRE 7, 2010**

NOMBRE____
Apellido Paterno **Apellido Materno** **Nombre(s)**

1. En un centro de maquinaria hay cuatro máquinas automáticas que producen tornillos. Un análisis de los registros de inspección anteriores produce los siguientes datos:

Máquina	Porcentaje de producción	Porcentaje de defectos producidos
1	15	4
2	30	3
3	20	5
4	35	2

Las máquinas 2 y 4 son más nuevas y se les ha asignado más producción que a las máquinas 1 y 3. Supóngase que la combinación de inventarios refleja los porcentajes de producción indicados.

a) Si se elige un tornillo al azar del inventario, ¿cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?

b) Si se elige un tornillo y se encuentra que está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que se haya producido en la máquina 3?

15 Puntos

Resolución

Sean:

D el evento que representa a los tornillos que se producen defectuosos.

M_i el evento que representa la producción de tornillos en la máquina i. $i = 1, 2, 3, 4$

Del enunciado

$$P(M_1) = 0.15 \qquad P(D|M_1) = 0.04$$

$$P(M_2) = 0.30 \qquad P(D|M_2) = 0.03$$

$$P(M_3) = 0.20 \qquad P(D|M_3) = 0.05$$

$$P(M_4) = 0.35 \qquad P(D|M_4) = 0.02$$

a) La probabilidad de tener un tornillo defectuoso, por el Teorema de Probabilidad Total:

$$P(D) = P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cap M_3) + P(D \cap M_4)$$

$$P(D) = P(M_1)P(D|M_1) + P(M_2)P(D|M_2) + P(M_3)P(D|M_3) + P(M_4)P(D|M_4)$$

sustituyendo:

$$P(D) = (0.15)(0.04) + (0.30)(0.03) + (0.20)(0.05) + (0.35)(0.02) = 0.032$$

b) La probabilidad de que un tornillo sea producido por la máquina 3, dado que es defectuoso, por el Teorema de Bayes se tiene:

$$P\left(M_3 \middle| D\right) = \frac{P\ \left(D \cap M_3\right)}{P\left(D\right)} = \frac{P\left(M_3\right) P\left(D \middle| M_3\right)}{P\left(D\right)} = \frac{\left(0.20\right)\left(0.05\right)}{\left(0.032\right)} = 0.3125$$

2. La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria X está definida por:

$$F_X\left(x\right) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ \dfrac{x^3 + x^2}{2} & ; \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Obtener la media y la variancia X

b) Calcular la probabilidad de que la variable aleatoria se encuentre ente 0.5 y 1

15 Puntos

Resolución

a) Para calcular el valor esperado, primero se debe obtener la función de densidad, entonces:

$$\frac{dF_X\left(x\right)}{dx} = f_X\left(x\right)$$

por lo que:

$$f_X\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2 + x & ; \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

El valor esperado se define como:

$$E\left(X\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X\left(x\right)\, dx$$

sustituyendo la función de densidad dada:

$$E\left(X\right) = \int_0^1 x\left(\frac{3}{2}x^2 + x\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^3 + x^2\right) dx = \left(\frac{3}{8}x^4 + \frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{3}{8} + \frac{1}{3} = \frac{17}{24} \approx 0.7083$$

La variancia es el segundo momento con respecto de la media, entonces:

$$Var\left(X\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(X - \mu_X\right)^2 f_X\left(x\right)\, dx$$

sustituyendo:

$$Var\left(X\right) = \int_0^1 \left(x - \frac{17}{24}\right)^2 \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^4 - \frac{9}{8}x^3 - \frac{85}{128}x^2 + \frac{289}{576}x\right) dx$$

$$Var\left(X\right) = \left[\frac{3}{10}x^5 - \frac{9}{32}x^4 - \frac{85}{384}x^3 + \frac{289}{1152}x^2\right]_0^1 = \frac{3}{10} - \frac{9}{32} - \frac{85}{384} + \frac{289}{1152} = \frac{139}{2880} \approx 0.0483$$

b) Para determinar la probabilidad pedida:

$$P\left(\frac{1}{2} \le X \le 1\right) = P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right)$$

de la función de distribución acumulativa, se tiene:

$$P\left(\frac{1}{2} \le X \le 1\right) = P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) = F_X\left(1\right) - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{13}{16} = 0.8125$$

3. Un explorador de petróleo perforará una serie de pozos en cierta área para encontrar un pozo productivo. La probabilidad de que tenga éxito en una prueba es 0.2

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer pozo productivo sea el tercer pozo perforado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el explorador no vaya a encontrar un pozo productivo si solamente puede perforar 10 pozos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el tercer encuentro de petróleo ocurra en el quinto pozo que se perfora?

15 Puntos

Resolución

a) Sea X la variable aleatoria que representa el número de pozos perforados para encontrar el primero que sea productivo.

$$X \sim Geométrica\ \left(p = 0.2 \right)$$

$$P\left(X = 3 \right) = q^2 p = \left(0.8\right)^2 \left(0.2\right) = 0.128$$

b) Sea U la variable aleatoria que representa en número de pozos no productivos en la perforación de 10 pozos.

$$U \sim Binomial\ \left(n = 10, p = 0.2\right)$$

$$P\left(U = 10\right) = \binom{10}{u} p^{10} q^{10-u} = \binom{10}{10} \left(0.8\right)^{10} \left(0.2\right)^{0} = \left(0.8\right)^{10} \approx 0.107$$

c) Sea Y la variable aleatoria que representa el número de perforaciones realizadas para encontrar el tercer pozo productivo.

$$Y \sim Pascal\ \left(r = 3, p = 0.2\right)$$

$$P\left(Y = 5\right) = \binom{Y-1}{r-1} q^3 p^2 = \binom{5-1}{3-1} \left(0.2\right)^3 \left(0.8\right)^2 \approx 0.0307$$

4. Una fábrica de focos para equipos de refrigeración afirma que éstos tienen una vida útil de 60 meses con una desviación estándar de 6 meses. El supervisor de una empresa que compra este tipo de focos para los refrigeradores que ensambla, prueba una muestra de 64 focos. Considerando que los datos proporcionados por la fábrica son confiables, ¿cuál es la probabilidad de encontrar una muestra con una vida útil promedio menor a 58 meses?

15 Puntos

Resolución

Sea X_i la variable aleatoria que representa la vida útil de los focos para equipos de refrigeración. $i = 1, 2, ..., 64$

$$X_i \sim Normal\ \left(\mu_{X_i} = 60,\ \sigma^2_{X_i} = \left(6\right)^2 \right)$$

la muestra es de tamaño 64, por el Teorema de Límite Central, entonces la media muestral tiene:

$$\overline{X} \sim Normal\ \left(\mu_{\overline{X}} = \mu_{X_i} = 60\ ,\ \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2_{X_i}}{n} = \frac{\left(6\right)^2}{64} \right)$$

La probabilidad de que la media muestral sea menor que 58 meses, es:

$$P\left(\overline{X} \le 58\right) \approx P\left(\overline{X} < 58\right) \approx P\left(\frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \le \frac{58-60}{\frac{6}{\sqrt{64}}} \right) = P\left(Z \le -\frac{8}{3} \right) = P\left(Z \le -2.67\right) \approx 0.0038$$

Es muy poco probable que la vida útil de los 64 focos de una muestra sea menor que 58 meses.

5. Supóngase que el tiempo de mantenimiento semanal de una máquina depende de dos variables aleatorias continuas (en horas), donde X es la variable aleatoria que representa la duración del mantenimiento mecánico y, Y es la variable aleatoria que representa la duración de mantenimiento eléctrico. Supóngase que la función de densidad de probabilidad conjunta es:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}(x+2y) & ;\quad 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0 & ;\quad \textit{en otro caso}\end{cases}$$

a) Calcular la probabilidad que en alguna semana, el mantenimiento mecánico dure menos de 15 minutos y el mantenimiento eléctrico dure más de 30 minutos.

b) Determinar la función de densidad marginal $g_X(x)$

c) Obtener la función de densidad condicional $f_{Y|X=x_0}(Y|X=x_0)$

d) Calcular la probabilidad de que el mantenimiento eléctrico (Y) dure menos de 15 minutos, dado que el mantenimiento mecánico (X) duró 30 minutos.

20 Puntos

Resolución

a) La probabilidad a calcular es:

$$P(X<15\cap Y>30)=P\left(X<\frac{1}{4}\cap Y>\frac{1}{2}\right)=\int_{y=\frac{1}{2}}^{y=1}\int_{x=0}^{x=\frac{1}{4}}\frac{2}{3}(x+2y)\,dx\,dy=$$

$$=\frac{2}{3}\int_{y=\frac{1}{2}}^{y=1}\left(\frac{1}{2}x^2+2xy\right)_{x=0}^{x=\frac{1}{4}}dy=\frac{2}{3}\int_{y=\frac{1}{2}}^{y=1}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2+2\left(\frac{1}{4}\right)y\right)dy=\frac{2}{3}\left(\frac{y}{32}+\frac{y^2}{4}\right)_{y=\frac{1}{2}}^{y=1}=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{32}(1)+\left(\frac{1}{4}\right)\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{32}\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{13}{96}\approx 0.135$$

b) La función marginal se define como:

$$g_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)\,dy$$

al sustituir:

$$g_X(x)=\int_{y=0}^{y=1}\frac{2}{3}(x+2y)\,dy=\frac{2}{3}\left(xy+y^2\right)_{y=0}^{y=1}=\frac{2}{3}(x+1)\qquad ;\qquad 0\le x\le 1$$

por lo tanto:

$$g_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}(x+1) & ;\quad 0\le x\le 1\\ 0 & ;\quad \textit{en otro caso}\end{cases}$$

c) La función condicional se define por:

$$f_{Y|X=x_0}(Y|X=x_0)=\begin{cases}\dfrac{f_{XY}(x_0,y)}{f_X(x_0)} & ;\quad f_X(x_0)>0\\ 0 & ;\quad \textit{en otro caso}\end{cases}$$

sustituyendo la función conjunta y la marginal, se tiene:

$$f_{Y|X=x_0}\left(Y|\,X=x_0\right)=\begin{cases}\dfrac{\frac{2}{3}\left(x_0+2y\right)}{\frac{2}{3}\left(x_0+1\right)} & ; \quad 0\le y\le 1\\ 0 & ; \quad \textit{en otro caso}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x_0+2y}{x_0+1} & ; \quad 0\le y\le 1\\ 0 & ; \quad \textit{en otro caso}\end{cases}$$

d) Se va a calcular:

$$P\left(Y<15\middle|\,X=\frac{1}{2}\right)$$

sustituyendo en la función de densidad condicional, se tiene:

$$f_{Y|X=\frac{1}{2}}\left(Y\middle|\,X=\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2}+2y}{\frac{1}{2}+1} & ; \quad 0\le y\le 1\\ 0 & ; \quad \textit{en otro caso}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\frac{1+4y}{2}}{\frac{3}{2}} & ; \quad 0\le y\le 1\\ 0 & ; \quad \textit{en otro caso}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1+4y}{3} & ; \quad 0\le y\le 1\\ 0 & ; \quad \textit{en otro caso}\end{cases}$$

entonces:

$$P\left(Y<\frac{1}{4}\middle|\,X=\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{1}{3}\left(1+4y\right)\,dy=\frac{1}{3}\left(y+2y^2\right)\Big|_0^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+2\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{16}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{16}+\frac{2}{16}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{16}\right)=\frac{1}{8}=0.125$$

6. La Procuraduría del Consumidor evalúa anualmente distintas marcas de cigarros de acuerdo con el contenido de alquitrán, nicotina y monóxido de carbono (CO). La asociación de médicos considera peligrosas cada una de estas sustancias en la salud del fumador. Estudios anteriores han demostrado que un aumento en el contenido de alquitrán y nicotina de un cigarro está acompañado de un incremento en el monóxido de carbono emitido en el humo del cigarro. La tabla siguiente muestra los valores para seis marcas de cigarros.

Marca	**Alquitrán [mg]**	**CO [mg]**
Benson&Hedges	16,0	16,6
Camel Lights	8,0	10,2
Marlboro	15,1	14,4
Raleigh	15,8	17,5
Montana	17,0	18,5
Viceroy Light	8,6	10,6

a) Elaborar un diagrama de dispersión entre el contenido de alquitrán (x), y CO (y)

b) Obtener la recta de regresión y trazarla en el diagrama de dispersión del inciso (a)

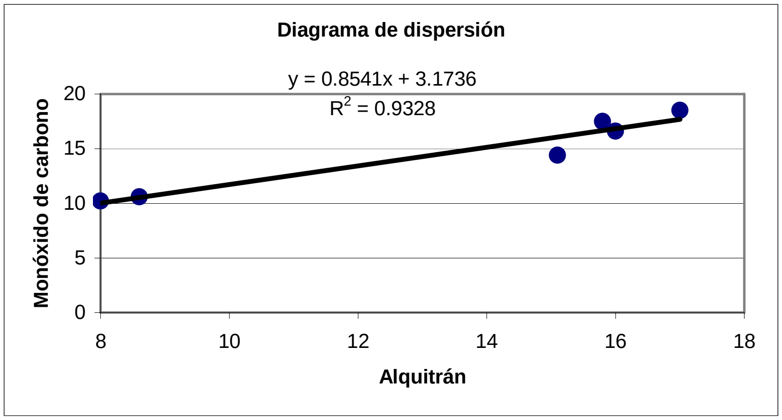
c) ¿Corroboran los resultados el hecho de que un aumento de alquitrán conlleva un aumento de monóxido de carbono?

d) ¿Considera que el modelo proporcionado es bueno? ¿Qué porcentaje del monóxido de carbono emitido en el humo del cigarro queda explicado por el modelo?

20 Puntos

Resolución

a) El diagrama de dispersión es:



b) Los parámetros y el modelo, son:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i \sum_{i=1}^{6} y_i}{6}}{\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^2}{6}} = \frac{1246.80 - \frac{(80.50)(87.80)}{6}}{1160.61 - \frac{(80.50)^2}{6}} = \frac{68.817}{80.568} \approx 0.8541$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 14.633 - (0.854)(13.417) \approx 3.1741$$

Por lo tanto el modelo está dado por:
$\hat{y} = 0.8541x + 3.1741$

b) De acuerdo a la gráfica, sí se corrobora el hecho de que un aumento de alquitrán conlleva un aumento de monóxido de carbono.

c) Sí es bueno el modelo que se obtuvo, ya que, el porcentaje del monóxido de carbono emitido en el humo del cigarro queda explicado por el modelo de manera muy aceptable como se observa en lo que sigue.

Para determinar si el modelo es válido debe obtenerse el coeficiente de determinación.
El coeficiente de correlación, está definido por:

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}\, SS_{yy}}}$$

$$SS_{xx} = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^2}{6} = 1160.61 - \frac{(80.50)^2}{6} = 80.568$$

$$SS_{yy}=\sum_{i=1}^{6}y_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{6}y_i\right)^2}{6}=1347.82-\frac{(87.80)^2}{6}=63.013$$

$$SS_{xy}=\sum_{i=1}^{6}x_iy_i-\frac{\sum_{i=1}^{6}x_i\sum_{i=1}^{6}y_i}{6}=1246.80-\frac{(80.50)(87.80)}{6}=68.817$$

sustituyendo:

$$r=\frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}\,SS_{yy}}}=\frac{68.817}{\sqrt{(80.568)(63.013)}}\approx 0.9658$$

Entonces el coeficiente de determinación es:

$$r^2=R^2=\frac{SS_{xy}^2}{SS_{xx}SS_{yy}}=\frac{(68.817)^2}{(80.568)(63.013)}\approx 0.9328$$

El ajuste es bueno puede considerarse válido el modelo, como se mencionó anteriormente.

Valores de la función de distribución acumulativa normal estándar

z	**0**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183