UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
SEGUNDO EXAMEN FINAL
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2010-2 **TIPO 1**
DURACIÓN MÁX. 2.5 HORAS **MIÉRCOLES 9 DE JUNIO DE 2010**

NOMBRE_____

1. De todas las fallas de un tipo especifico de unidad de disco duro de computadora, se determina que 20% de éstos tiene dañado sólo el sector que contiene la tabla de asignación de archivos, 70% sólo los sectores no esenciales están dañados y 10% tanto el sector de asignación como uno o más sectores no esenciales están dañados. Se selecciona aleatoriamente una unidad de disco dañada y se examina.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el sector de asignación esté dañado?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un sector no esencial esté dañado?
c) Si se encuentra que la unidad de disco tiene un sector de asignación dañado, ¿cuál es la probabilidad de que algunos sectores no esenciales también estén dañados?

15 Puntos
Resolución

Sean los eventos

A el cual representa daño en el sector que contiene la tabla de asignación.
B el cual representa daño en los sectores no esenciales.

Del enunciado

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=0.2\,,\qquad P\left(B\cap\overline{A}\right)=0.7\,,\qquad P\left(A\cap B\right)=0.1$$

a) $$P\left(A\right)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(A\cap B\right)=0.2+0.1=0.3$$

b) $$P\left(B\right)=P\left(B\cap\overline{A}\right)+P\left(A\cap B\right)=0.7+0.1=0.8$$

c) $$P\left(B\,|\,A\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(A\right)}=\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3}$$

2. Sea X los gastos médicos totales (en miles de dólares) incurridos por un individuo particular durante un año dado. Aunque X es una variable aleatoria discreta, supóngase que su distribución es bastante bien aproximada por una distribución continua con función de densidad $f_X\left(x\right)=ke^{-2x}$ con $x>0$

a) Determinar el valor de k que hace una función de densidad válida.
b) ¿Cuáles son el valor esperado y la desviación estándar de los gastos médicos totales?
c) Un individuo está cubierto por un plan de seguro que le impone una provisión deducible de \$500 (así que los primeros \$500 de gastos son pagados por el individuo). Luego el plan pagará 80% de cualquier gasto adicional que exceda de \$500 y el pago máximo por parte del individuo (incluida la cantidad deducible) es de \$2500. Sea Y la cantidad de gastos médicos de este individuo pagados por la compañía de seguros. ¿Cuál es el valor esperado de Y ?

Nota: $X=V+Y$ donde V es la variable aleatoria que representa la cantidad de gastos pagados por el individuo.

20 Puntos
Resolución

a) De la propiedad $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(x\right)\,dx=1$, se tiene

$$\int_{0}^{+\infty} ke^{-2x}\,dx=1$$

$$1 = k \lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-2x}dx = \frac{k}{-2} \lim_{R\to+\infty} \left[e^{-2x} \right]_0^R = \frac{k}{-2} \lim_{R\to+\infty} \left[e^{-2R} - e^{0} \right] = \frac{k}{2} \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

De otra forma, se observa que es una distribución exponencial, por lo tanto $k = 2$ con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad \textit{en otro caso} \end{cases}$$

b) El valor esperado y la desviación estándar de los gastos médicos totales, está dado por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

sustituyendo

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x\, \left(2e^{-2x}\right)\, dx = 2 \lim_{R\to+\infty} \int_0^R xe^{-2x}dx = 2 \lim_{R\to+\infty} \left(-\frac{1}{4}(1+2x)e^{-2x} \right)_0^R$$

$$E(X) = -\frac{1}{2} \lim_{R\to+\infty} \left[(1+2R)e^{-2R} - 1 \right] = -\frac{1}{2} \lim_{R\to+\infty} \left[(1+2R)e^{-2R} - 1 \right] = \frac{1}{2}$$

La variancia está definida por el segundo momento con respecto a la media, entonces

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, f_X(x)\, dx$$

sustituyendo

$$Var(X) = \int_0^{+\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\, 2e^{-2x}\, dx = 2 \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 e^{-2x}dx = 2 \lim_{R\to+\infty} \left(-\frac{1}{8}\left(1+4x^2\right)e^{-2x} \right)_0^R$$

$$Var(X) = -\frac{1}{4} \lim_{R\to+\infty} \left(\left(1+4x^2\right)e^{-2x} \right)_0^R = -\frac{1}{4} \lim_{R\to+\infty} \left[\left(1+4R^2\right)e^{-2R} - e^{0} \right] = \frac{1}{4}$$

Se verifica la media y variancia de las características de una función de densidad con distribución exponencial con $\lambda = 2$, entonces

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

y

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4}$$

c) Sea Y la cantidad de gastos pagados por la aseguradora y V la cantidad de gastos pagados por el individuo

$X = V + Y$

de donde

$Y = X - V$

entonces los gastos pagados por el individuo están dados por

$$V(X) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x \le 0.5 \\ 0.5 + 0.2(x - 0.5) & ; \quad 0.5 < x < 10.5 \\ 2.5 & ; \quad x \ge 10.5 \end{cases}$$

finalmente

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} y(x)\, f_X(x)\, dx$$

$$E(Y)=\int_{0.5}^{10.5}\Big(x-\big(0.5+0.2(x-0.5)\big)\Big)2e^{-2x}dx+\int_{10.5}^{+\infty}(x-2.5)2e^{-2x}dx$$

$$E(Y)=2\int_{0.5}^{10.5}(0.8x-0.4)e^{-2x}dx+2\int_{10.5}^{+\infty}(x-2.5)e^{-2x}dx$$

$$E(Y)=-0.8\Big[xe^{-2x}\Big]_{0.5}^{10.5}-\lim_{R\to+\infty}\Big[(x-2)e^{-2x}\Big]_{10.5}^{R}=-0.8\Big[(10.5)e^{-2(10.5)}-(0.5)e^{-2(0.5)}\Big]-$$

$$-\lim_{R\to+\infty}\Big[(R-2)e^{-2R}-(10.5-2)e^{-2(10.5)}\Big]$$

$$E(Y)=0.14715$$

Por lo que la compañía aseguradora paga \$147.15 dólares por asegurado.

3. Un estudio de la Secretaría de Transporte y Vialidad (SETRAVI), estima que el número de horas prácticas necesarias para la obtención del permiso de conducir para menores de edad entre 16 y 17 años, sigue una distribución normal con media de 24 [h] y variancia 9 [h^2]

a) ¿Qué probabilidad hay de obtener el permiso de conducir con 20 [h] de práctica o menos?

b) Calcular la probabilidad de que la octava persona sea la tercera en obtener el permiso para conducir con máximo 20 [h] de práctica.

c) Determinar la probabilidad de que la quinta persona sea la primera en obtener el permiso para conducir con a lo más 20 [h] de práctica.

20 Puntos

Resolución

Sea X la variable aleatoria que representa las horas de práctica necesarias para la obtención del permiso para conducir.

$$X \sim Normal\ \left(\mu_X = 24[h],\ \sigma_X^2 = 9\ \left[h^2\right]\right)$$

a) La probabilidad de obtener el permiso para conducir con máximo 20 [h] de práctica

$$P(X\le 20)=P(X<20)\approx P\left(Z<\frac{20-24}{3}\right)=P\left(Z<-\frac{4}{3}\right)=P(Z<-1.33)=F_Z(-1.33)$$

de la tabla de valores de la distribución acumulativa normal estándar

$$P(X\le 20)\approx 0.0918$$

b) La probabilidad de que la octava persona sea la tercera en obtener el permiso con a lo más 20 [h] de práctica.

Sea U la variable aleatoria que representa la octava persona es la tercera en obtener el permiso para conducir con máximo 20 [h] de practica.

$$U \sim Pascal\ (r=3,\ p=0.0918)$$

$$P(U=8)=\binom{U-1}{r-1}p^3q^{u-3}=\binom{7}{2}(0.0918)^3(0.9082)^5\approx 0.0100$$

c) La probabilidad de que la quinta persona sea la primera en obtener el permiso con a lo más 20 [h] de práctica.

Sea Y la variable aleatoria que representa la quinta persona sea la primera en obtener el permiso para conducir con máximo 20 [h] de practica.

$$Y \sim Geométrica\ (p=0.0918)$$

$$P(Y=5)=q^4p=(0.9082)^4(0.0918)\approx 0.0625$$

4. Una caja contiene cuatro baterías defectuosas, tres baterías en estado regular y dos baterías aceptables. Se seleccionan dos baterías al azar.

a) Calcular la probabilidad de seleccionar una batería defectuosa y una aceptable.

b) Determinar la distribución marginal $g_X(x)$, correspondiente al número de baterías defectuosas.

15 Puntos
Resolución

a) Sea X la variable aleatoria que representa el número de baterías defectuosas.

$R_X = \{0,1,2\}$

Sea Y la variable aleatoria que representa el número de baterías aceptables.

$R_Y = \{0,1,2\}$

La función masa de probabilidad está dada por

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\binom{4}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{9}{2}} & ; \quad x = 0,1,2 \quad , \quad y = 0,1,2 \quad , \quad 2 - x - y \le 2 \\ 0 & ; \quad \textit{en otro caso} \end{cases}$$

sustituyendo para determinar la probabilidad

$$f_{XY}(X=1,\ Y=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{9}{2}} = \frac{(4)(2)(1)}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

b) La función de probabilidad se define como $g_X(x) = \sum_{\forall y} f_{XY}(x,y)$

sustituyendo en la función marginal

$$g_X(X=0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$g_X(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

$$g_X(X=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{0}}{\binom{9}{2}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

la forma tabular está dada por

x	0	1	2
$g_X(x)$	$\frac{10}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{6}{36}$

5. Si la distribución del peso de los ingenieros que viajan del Distrito Federal a Chetumal, Quintana Roo, tiene una media de 74 [kg] y una desviación estándar de 8.5 [kg]. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso total combinado de 36 de estos viajeros sea menor que 2722 [kg]?

15 Puntos
Resolución

Sea Y la variable aleatoria que representa el peso [en kg] de los ingenieros que viajan del D.F. a Chetumal, Quintana Roo.

Por el Teorema del Límite Central si $n = 36$, se conoce la media y desviación estándar, se puede aproximar por

$$Y \sim Normal\ \left(\mu_Y = 74[kg],\ \sigma_Y^2 = (8.5)^2\ \left[kg^2\right]\right)$$

entonces los parámetros del peso total combinado de los 36 ingenieros

$$T \sim Normal\ \left(\mu_T = n\mu_Y, \sigma_T^2 = n\sigma_Y^2\right)$$

sustituyendo

$$T \sim Normal\ \left(\mu_T = 2664,\ \sigma_T^2 = 2601\right)$$

se determinará

$$P(T \le 2722) = P(T < 2722) \approx P\left(\frac{T-\mu_T}{\sigma_T} < \frac{2722-2664}{\sqrt{2601}}\right) = P\left(Z < \frac{58}{51}\right) = P(Z < 1.14) = F_Z(1.14)$$

de tablas de la distribución acumulada normal estándar

$$P(T \le 2722) = P(T < 2722) \approx 0.8729$$

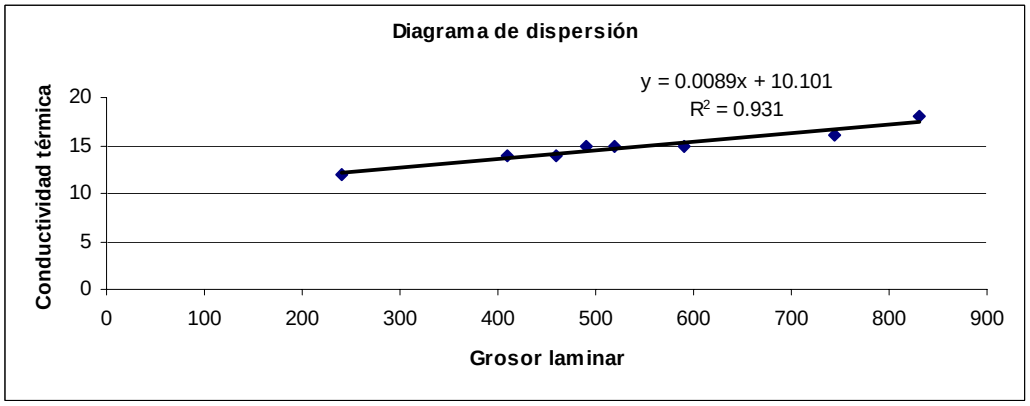
6. Una gráfica que aparece en el artículo "Thermal conductivity of polyethilenc: The effects of cristal size, density and orientation on the thermal conductivity" sugiere que el valor esperado de conductividad térmica y es una función lineal de $\frac{10^4}{x}$ donde x es el grosor laminar [en ångström].

x	240	410	460	490	520	590	745	830
y	12	14	14	15	15	15	16	18

a) Trazar el diagrama de dispersión.
b) Estimar los parámetros de la función de regresión y su función de regresión.
c) Pronosticar el valor de conductividad térmica cuando el grosor laminar es de 500 [Å]

15 Puntos
Resolución

a) El diagrama de dispersión es



b) Los parámetros y el modelo, son

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i \sum_{i=1}^{8} y_i}{8}}{\sum_{i=1}^{8} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{8} x_i\right)^2}{8}} = \frac{65920 - \frac{(4285)(119)}{8}}{2539825 - \frac{(4285)^2}{8}} \approx 0.0089$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{119}{8} - (0.0089)\left(\frac{4285}{8}\right) \approx 10.1079$$

El modelo está dado por

$$\hat{y} = 10.1079 + 0.0089x$$

c) Para obtener la estimación del valor de conductividad térmica cuando el grosor laminar es de 500 [Å], es

$$\hat{y} = 10.1079 + 0.0089(500) \approx 14.5579$$